

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

# **ZAVRŠNI RAD**

Marko Horvat

Zagreb, 2008.

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

# **ZAVRŠNI RAD**

Mentor

Doc. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

Zagreb, 2008.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno služeći se stečenim znanjem i navedenom literaturom.

Zahvaljujem svom mentoru, doc. dr. sc. Tanji Jurčević Lulić, na pomoći pri odabiru teme i obradi iste.

**Sadržaj**

1. Kinematika gibanja ljudskog tijela: položaj i pomak tijela .....	9
1.1 Određivanje položaja tijela .....	11
1.1.1 Metoda koordinata .....	11
1.1.2 Kartezijev koordinatni sustav vs. kosi koordinatni sustav .....	12
1.2 Definiranje orijentacije tijela.....	14
1.2.1 Glavne ravnine i osi ljudskog tijela .....	15
1.2.1.1 Određivanje lokalnog koordinatnog sustava na kruto tijelo .....	16
1.2.2 Određivanje tjelesnog (somatskog) sustava na ljudskom tijelu.....	18
1.2.3 Indirektna metoda definiranja orijentacije tijela .....	21
1.2.4 Što je „rotacija tijela“? .....	22
1.2.5 Opisivanje položaja i pomaka.....	23
1.2.5.1 Matrična metoda .....	23
1.2.5.1.1 Relativna orijentacija lokalnog i globalnog sustava .....	23
1.2.5.1.2 Definiranje položaja u dva referentna koordinata sustava ( koordinatna transformacija ili Alias (pseudo) problem) .....	27
1.2.5.1.3 Definiranje pomaka ( Alibi problem) .....	32
1.2.5.1.4 Projekcijski kutovi .....	38
1.2.5.2 Eulerova metoda .....	39
1.2.6 Prednosti i nedostaci različitih kutnih pravila .....	47
1.2.7 Određivanje položaja tijela pomoću eksperimentalnih snimanja.....	48
2. Kinematički lanci.....	50
2.1 Stupnjevi slobode i pokretljivost kinematičkog lanca .....	51
2.2 Otvoreni kinematički lanci: pokretljivost zadnjeg člana .....	54
2.3 Kinematički modeli i pokretljivost ljudskog tijela.....	55

2.4 Ograničenja ljudskog gibanja.....	58
2.5 Analiza položaja kinematičkih lanaca.....	61
2.5.1 Dva jednostavna lanca.....	61
2.5.1.1 Dvočlani planarni lanac .....	61
2.5.1.2 Tročlani planarni lanac .....	63

### **Popis slika**

Slika 1.1. Slika skakača u vodu. Prikaz tijela koje mijenja položaj u prostoru, rotira, te mijenja konfiguraciju zglobova

Slika 1.2. Položaj točke P u koordinatnom sustavu

Slika 1.3. Komponente (kontravarijantni oblik) i ortogonalna (kovarijantni oblik) projekcija vektora **P** u kosom koordinatnom sustavu

Slika 1.4. Ravnine ljudskog tijela

Slika 1.5 Prikaz vektora  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  i  $\mathbf{r}_4$

Slika 1.6. Elipse inercije za različite položaje ljudskog tijela u zraku

Slika 1.7. Orijentacija tijela u prostoru prikazana strelicama za različite lokalne referentne sustave

Slika 1.8. Orijentacija koljeno-rame osi ( $f_3$ ) tijekom skoka

Slika 1.9. Prikaz skijaškog skakača

Slika 1.10. Čista translacija je definirana s tri komponente vektora **L**.

Slika 1.11. Komponente jediničnog vektora **x** u globalnom referentnom sustavu

Slika 1.12. Gornja slika prikazuje rotaciju lokalnog sustava L u odnosu na globalni sustav G.

Slika 1.13. Položaj točke P u globalnom sustavu

Slika 1.14. Pomak lokalnog sustava L iz točke 1 u točku 2

Slika 1.15. Kretanje ruke (segment B) u odnosu na torzo (segment A) u trodimenzionalnom prostoru

Slika 1.16. Dva različita doskoka s vratila

Slika 1.17. Prikaz Eulerovih i Kardanovih kutova kao kutova kardanskog sustava.

Slika 1.18. Prikaz činjenice da se do iste orijentacije može doći na više načina

Slika 1.19. Prikaz Eulerovih kutova

Slika 1.20. Referentni sustavi korišteni u proučavanju ljudskog hoda

Slika 2.1. Kinematički lanci u ljudskim pokretima, bam – otvoreni lanac  
ABCDEA,  $dff_1d_1$  – zatvoreni lanci

Slika 2.2. Dva modela ruke; antropološki i funkcionalni

Slika 2.3. Kinematički model ljudskog tijela

Slika 2.4. Pokretljivost ljudskog tijela

Slika 2.5. Ravninski kinematički lanci s jednim stupnjem slobode gibanja (lijevo, strategija „savijanja trupa“) i s 2 stupnja slobode gibanja( desno, strategija „savijanja koljena“)

Slika 2.6. Model dvočlanog planarnog lanca

Slika 2.7. Model tročlanog planarnog lanca

### **Popis tabela**

Tabela 1 – usporedba različitih kutnih koordinatnih sustava

### **Popis oznaka**

$X, Y, Z$     osi globalnog referentnog sustava

$x, y, z$     osi lokalnog referentnog sustava

$l$            dužina

$L_G$         vektor ishodišta lokalnog sustava u globalnom sustavu

$P_G, P_L$     komponente vektora  $P$  u globalnom i lokalnom referentnom sustavu

$\Theta$           izmjereni kut u globalnom referentnom sustavu

$\alpha$         izmjereni kut u lokalnom referentnom sustavu

$[R]$         matrica rotacije

$[T]$         matrica transformacije

$[D]$         matrica pomaka

$[I]$         jedinična matrica



## 1. Kinematika gibanja ljudskog tijela: položaj i pomak tijela

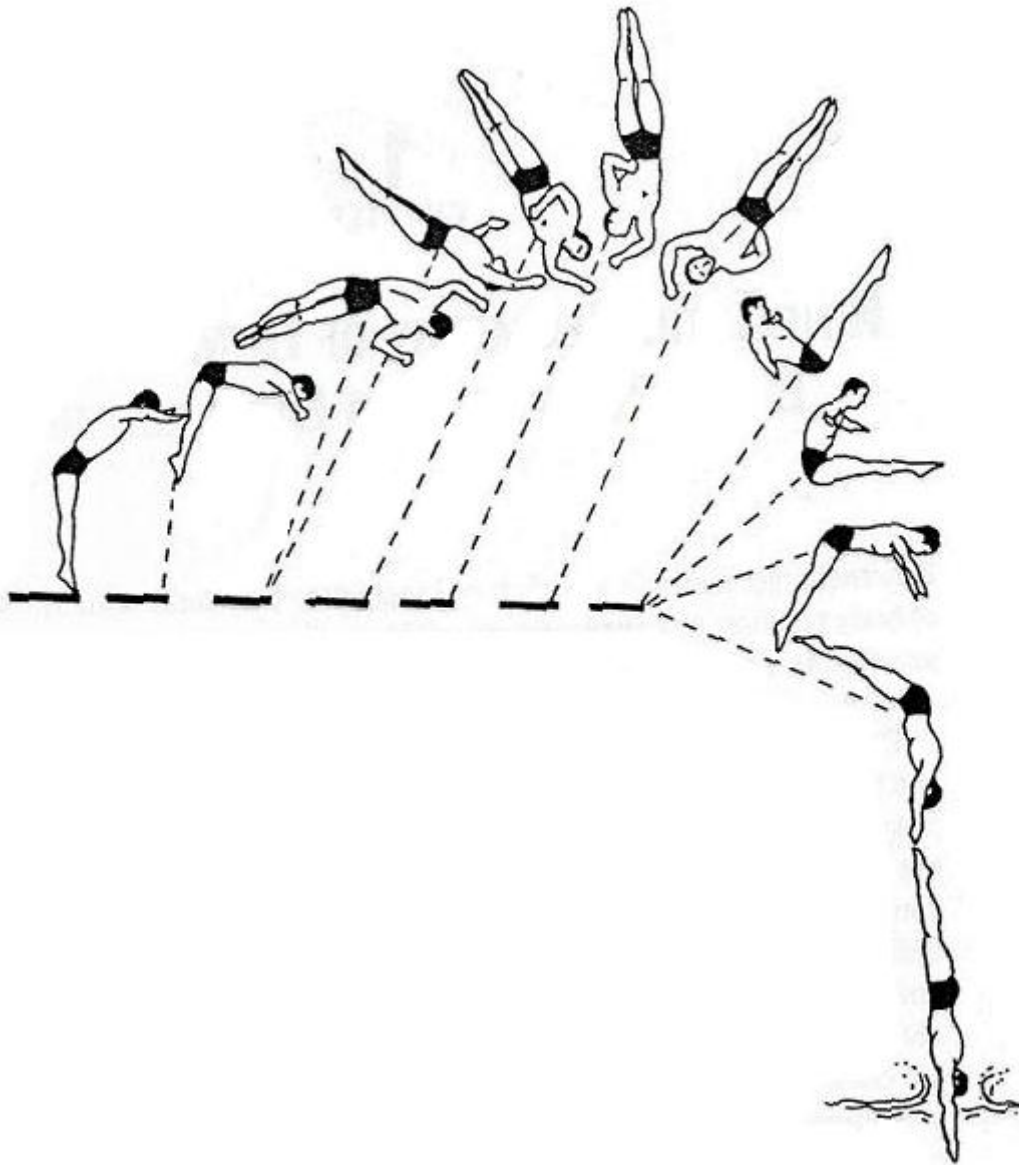
Kinematika proučava geometrijska svojstva gibanja. Često se kinematika naziva *geometrijom gibanja* jer je gibanje promjena položaja tijela u prostoru.

Položaj krutog tijela definiran je koordinatama točke na tom tijelu i orijentacijom tijela. Ljudsko tijelo se može promatrati kao sustav krutih štapova povezanih zglobovima. Dijelovi ljudskog tijela ustvari nisu krute strukture, ali tijekom razmatranja ljudskog gibanja smatrat ćemo ih takovima. Jednostavnost toga pristupa omogućava njegovu uporabu. Temeljeno na tom postulatu, položaj ljudskog tijela možemo definirati pomoću:

- a) Položaja u prostoru
- b) Orijentacije
- c) Konfiguracijom zglobova( Slika 1.1)

Poglavlje 1. odnosi se na definiranje lokacije i orijentacije ljudskog tijela te tehnike koje su korištene za opisivanje položaja tijela.

Dio 1.1 bavi se definiranjem položaja tijela pomoću metode koordinatnih sustava. Sastoji se od generalnog uvoda u metodu i objašnjava Kartezijev koordinatni sustav u odnosu na druge. Nadalje, pojmovi komponenata vektora i projekcije, bit će objašnjeni. U dijelu 1.2 bit će objašnjene metode koje će se koristiti kod definiranja orijentacije tijela, počevši s fiksacijom lokalnog koordinatnog sustava u sklopu krutog tijela, rasprava o problemima s kojima smo suočeni kod postavljanja referentnog sustava i definiranje rotacije ljudskog tijela. Taj dio također objašnjava glavne metode korištene za opisivanje ljudskog tijela u prostoru : matična metoda i Eulerova metoda kutova.



Slika 1.1. Slika skakača u vodu. Prikaz tijela koje mijenja položaj u prostoru, rotira, te mijenja konfiguraciju zglobova

Matrična metoda uključuje tri problema, koji su svi međusobno povezani:

1. Kako definirati položaj tijela u zadanom referentnom sustavu?
2. Kako opisati položaj koristeći dodatni referentni sustav (tzv. *alias problem* – isti položaj može se različito opisati) ?
3. Kako opisati pomake tijela kada tijelo zauzima drugačije položaje? To se još naziva i *alibi problem*.

Prednosti i nedostaci različitih kutnih konvencija objašnjeni su u dijelu 1.2.6.

### **1.1 Određivanje položaja tijela**

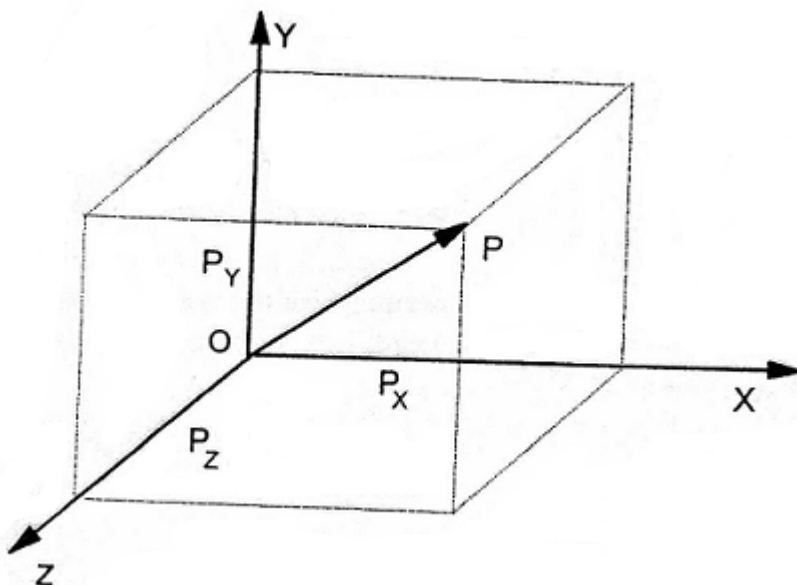
Da bi smo opisali položaj tijela u prostoru, koristimo metodu koordinata. Koordinate su skup brojeva koji locira točku u referentnom sustavu. U istraživanjima se koriste različiti koordinatni sustavi (na primjer, Kartezijev, sferni, cilindrični). Neki sustavi su više prikladniji od ostalih u specifičnim situacijama. Kartezijev referentni sustav je ipak najbolji izbor i korišten je mnogo više nego ostali sustavi.

#### **1.1.1 Metoda koordinata**

Objašnjenje je izvedeno u tri koraka:

- a. Definiran je globalni referentni koordinatni sustav.
- b. Bilo koja točka P na tijelu je označena (uobičajeno je izabrati točku koja je ishodište lokalnog koordinatnog sustava).
- c. Utvrđen je položaj točke u globalnom referentnom sustavu

Prema konvenciji, globalni sustav je definiran kao desni pravokutni sustav, s ishodištem učvršćenim na neku referentnu točku. Općenito, globalni sustav je fiksiran na podlozi, os X je horizontalna i pozitivna prema naprijed tj. u smjeru gibanja, os Y je vertikalna i pozitivna prema gore, os Z je horizontalna i pozitivna prema desno (slika 1.2). Drugi popularan izbor jest da pozitivan smjer osi X bude u desno, os Y je horizontalna i pozitivna prema naprijed, a os Z je vertikalna i pozitivna prema gore. Osi su orijentirane u odnosu na subjekt, koji gleda u smjeru primarnog interesa (gibanja, hoda, trčanja, skakanja).



Slika 1.2. Položaj točke P u koordinatnom sustavu

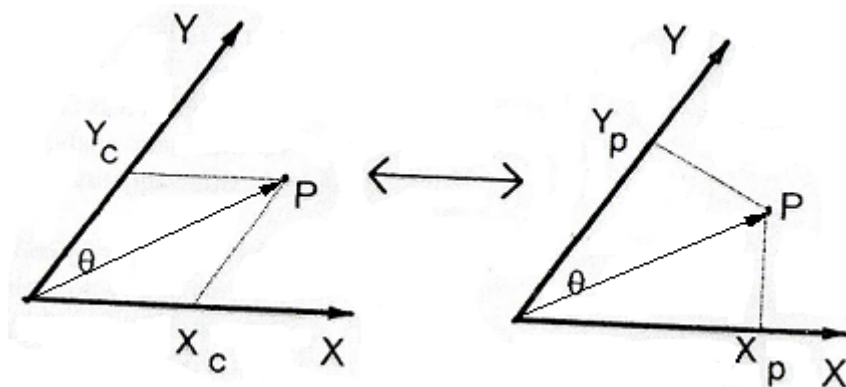
Nedostatak jednog desnog Kartezijevog sustava je to što iste varijable imaju drugačiji predznak za lijevi i desni ekstremitet. Na primjer, addukcija desne ruke je u pozitivnom smjeru, a isti takav pokret lijeve ruke je u negativnom smjeru. Da izbjegnemo tu neugodnost, preporuča se „FOU“ sustav označavanja ( Forward, Outward, Upward). FOU sustav je praktičan za kinematičku analizu.

Položaj točke P može se napisati pomoću vektora  $\mathbf{P}$  ili pomoću komponenti vektora  $\mathbf{P}$ . U pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu, komponente tog vektora jednake su projekcijama tog vektora na tri referentne osi. Komponente vektora  $\mathbf{P}$ ,  $P_x$ ,  $P_y$  i  $P_z$ , definiraju položaj točke ( slika 1.2)

### 1.1.2 Kartezijev koordinatni sustav vs. kosi koordinatni sustav

Kartezijeve koordinate su ortogonalne, što znači da su osi sustava međusobno okomite jedna na drugu. Kada osi nisu ortogonalne, radi se o kosom koordinatnom sustavu. U proučavanju biomehanike, često se koristi kosi referentni sustav. Na primjer, polukružni kanali srednjeg uha nisu potpuno međusobno pod pravim kutom. Stoga osi maksimalne osjetljivosti polukružnih kanala tvore iskrivljeni referentni koordinatni sustav. U kosom

koordinatnom sustavu, položaj točke može se prikazati na dva načina, ili pomoću komponentata ili pomoću projekcija ( slika 1.3). Ako komponente i projekcije nisu jednake jedna drugoj, sustav nije ortogonalan. U Kartezijevom koordinatnom sustavu, komponente i projekcije su identične. Koordinate komponentata se nazivaju kontravarijantni vektori, a koordinate projekcije se nazivaju kovarijantni vektori. Kontravarijantne komponente vektora  $\mathbf{P}$ , kada se zbroje vektorski prema zakonu paralelograma, daju vektor  $\mathbf{P}$ . Stoga, kontravarijanti prikaz se ujedno može i nazvati paralelogramski prikaz. Kovarijantna projekcija vektora  $\mathbf{P}$ , ako se vektorski sumira, neće dati vektor  $\mathbf{P}$ .



Slika 1.3. Komponente (kontravarijantni oblik) i ortogonalna (kovarijantni oblik) projekcija vektora  $\mathbf{P}$  u kosom koordinatnom sustavu

Ako je vektor  $\mathbf{P}$  dat u kovarijantnom obliku, pomoću njegovih projekcija ( $X_p$ ,  $Y_p$ ), kontravarijantni prikaz vektora, ili pomoću komponentata ( $X_c$ ,  $Y_c$ ), može se pronaći množenjem kovarijantnog vektora s tenzorom, koji je n-dimenzionalna matrica. U

ravninskom modelu na slici 1.3, tenzor je  $2 \times 2$  matrica  $\begin{bmatrix} 1 & \cos \Theta \\ \cos \Theta & 1 \end{bmatrix}$ . Senzorni

poticaji, često su prikazani u kovarijantnom obliku, kao projekcije poticaja na koordinatne osi. Npr. reakcija labirinta srednjeg uha, u unutrašnjem uhu, proporcionalna je projekciji osi rotacije glave na os maksimalne osjetljivosti svakog polukružnog kanala.

Zato što su signali polukružnih kanala proporcionalni projekcijama, ne mogu se vektorski zbrajati ( slika 1.3)

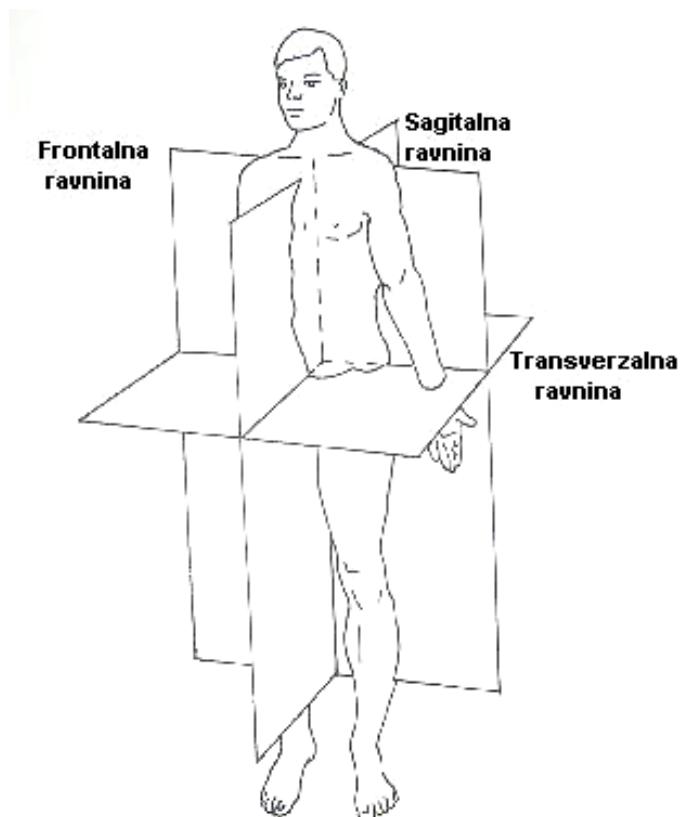
### **1.2 Definiranje orijentacije tijela**

Da bi se definirala orijentacija tijela potrebna su tri koraka:

1. Definirati globalni referentni sustav
2. Lokalni referentni sustav pričvrstiti na tijelo
3. Matematički definirati orijentaciju lokalnog referentnog sustava u odnosu na globalni sustav. U tu svrhu se koriste različite metode klasične mehanike

Kada proučavamo položaj ljudskog tijela, uobičajeno je koristiti dva lokalna referentna sustava pričvršćena na tijelo. Prvi referentni sustav, zvan sustav kretanja, orijentiran je isto kao i globalni referentni sustav i kreće se s tijelom te zadržava svoju orijentaciju u prostoru. Ishodište toga sustava je obično u središtu mase. Drugi referentni sustav, zvan tjelesni sustav, smješten je unutar tijela i mijenja svoju orijentaciju u prostoru kada se mijenja orijentacija tijela.

### 1.2.1 Glavne ravnine i osi ljudskog tijela



Slika 1.4. Ravnine ljudskog tijela

Kod *anatomskog položaja* ljudskog tijela pretpostavljamo da tijelo stoji uspravno na horizontalnoj podlozi, s rukama obješenim uz tijelo i dlanovima okrenutim prema naprijed te uspravnim položajem glave (slika 1.4). Ravnina koja dijeli ljudsko tijelo na lijevi i desni dio naziva se *sagitalna ravnina*. Sagitalna ravnina je usmjerena u anteroposteriornom smjeru. Ako ravnina dijeli tijelo na dvije simetrične polovice, tada se naziva *kardinalna*, ili *glavna sagitalna ravnina*.

Za uspravna tijela, horizontalna ravnina koja prolazi kroz tijelo naziva se *transverzalna ravnina*. Transverzalna ravnina koja prolazi kroz težište tijela naziva se kardinalna ili glavna transverzalna ravnina.

*Frontalna* ili *koronalna* ravnina prolazi bočno s jedne na drugu stranu i okomita je na preostale dvije, sagitalnu i transverzalnu ravninu. Frontalna ravnina dijeli tijelo na prednji (anterior) i stražnji (posterior) dio. Kada ravnina prolazi kroz težište tijela naziva se

glavna frontalna ravnina.

Osi na sjecištima ravnina nazivamo:

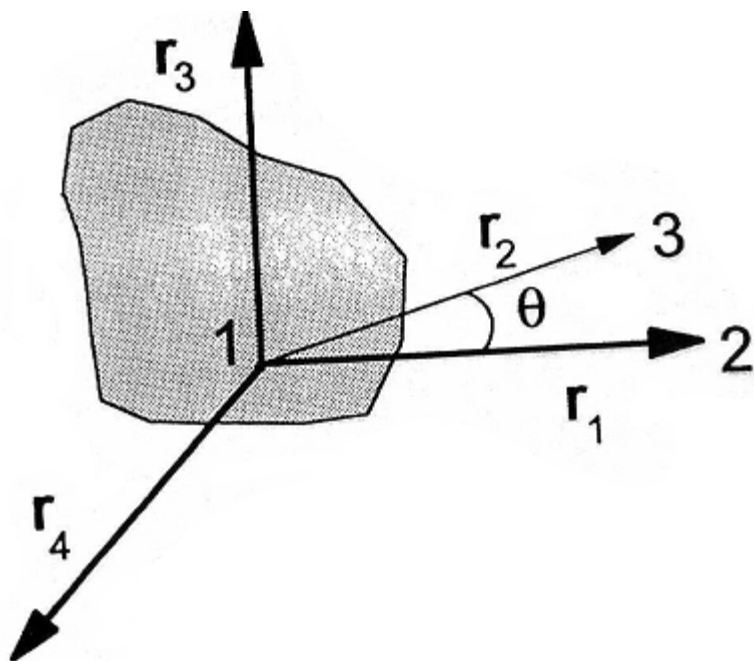
- *Anteroposteriorna os* ( sjecište sagitalne i transverzalne ravnine)
- *Longitudinalna os* ( sjecište sagitalne i frontalne ravnine)
- *Lateromedialna os* ili frontalna os ( sjecište frontalne i transverzalne ravnine)

#### **1.2.1.1 Određivanje lokalnog koordinatnog sustava na kruto tijelo**

Tijelo se naziva krutim ako se udaljenost između bilo kojih dviju točaka unutar tijela ne mijenja. Kod gibanja krutog tijela, kut između bilo kojih dviju linija tijela ostaje isti. Idealno kruto tijelo je matematička apstrakcija. I kao takvo, kruto tijelo ne postoji u prirodi. Za svaki slučaj posebno, istraživač mora odlučiti da li da tijelo promatra kao kruto tijelo ili ne. Na primjer, u nekim istraživanjima trup tijela predstavlja se kao jedno kruto tijelo, opet u nekim drugim istraživanjima, trup je modeliran kao sustav dva ili tri kruta tijela povezana zglobovima ili kao jedno deformabilno tijelo. Odluka o modelu koji će se koristiti ovisi o zahtijevanoj točnosti i gibanju koje se proučava i istraživaču.

Da bi odredili lokalni referentni sustav u krutom tijelu, moraju biti poznate koordinate tri točke unutar tijela (točke 1. 2. 3. - Slika 1.5 ). Dva vektora,  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$ , definiraju ravninu. Vektorski produkt tih vektora definira referentni lokalni koordinatni sustav.



Slika 1.5 Prikaz vektora  $r_1, r_2, r_3$  i  $r_4$ 

Sljedeći postupak se koristi za određivanje referentnog sustava na krutom tijelu:

1. Vektorski produkt vektora  $r_1$  i  $r_2$ , definira vektor  $r_3$
2. Vektorski produkt vektora  $r_3$  i  $r_1$  (ili  $r_3$  i  $r_2$ ) definira vektor  $r_4$ . Tako postaju poznate tri međusobno okomite osi (vektori); ali svaki vektor ima drugačiju dužinu.
3. Svaki vektor treba podijeliti sa svojim dužinom da bi se odredili jedinični vektori.

Lokalni referentni sustav je sad definiran u potpunosti.

Kada smo definirali referentni sustav; opis orijentacije tijela s obzirom na globalni referentni sustav, reduciran je na opis položaja lokalnog sustava (pričvršćen na tijelo) relativno u odnosu na globalni sustav. Prema tome, problem „kako opisati položaj tijela“ i „kako opisati položaj lokalnog koordinatno sustava“ postaje jednak.

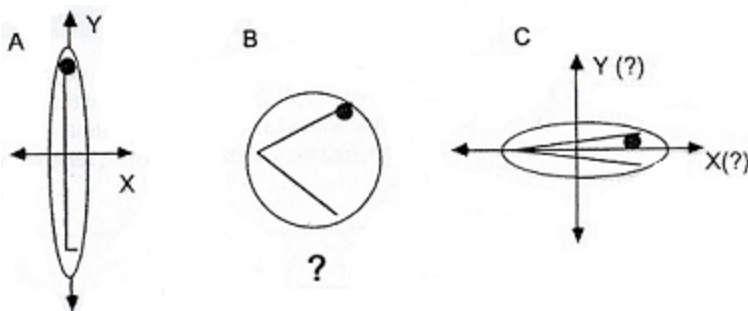
### 1.2.2 Određivanje tjelesnog (somatskog) sustava na ljudskom tijelu

Ljudsko tijelo nije kruto tijelo. Umjesto toga, ono je sustav tijela ( segmenta ili dijelova tijela) čiji se relativni položaji mijenjaju. Tjelesni referentni sustav za ljudsko tijelo može se temeljiti na (a) anatomskim markerima, (b) mehaničkim točkama ( npr. težište) i osima (na primjer, glavne osi tromosti); ili (c) kombinacija (a) i (b). Kada je tjelesni sustav temeljen na mehaničkim točkama, referentne osi mijenjaju svoj položaj u odnosu na anatomske markere, dakle kada dođe do promjene konfiguracije zglobova tijela.

Najčešće se koriste sljedeći anatomske tjelesni sustavi:

1. *Sakrum*. Sakrum je velika nedeformabilna kost koja se može promatrati kao kruto tijelo. S ovim pristupom, sakrum se smatra kao reprezentativni dio cijelog tijela.
2. *Rameni pojas*. S čistog mehaničkog stajališta, ovaj tjelesni sustav je vrlo daleko od idealnog. Rameni pojas se sastoji od mnogih kostiju koje mogu promijeniti svoj relativni položaj. Unutrašnji referentni sustav ( od strane gledišta izvođača radnje, a ne vanjskog promatrača) smješten je u tom pojasu, ili je vrlo blizu njega.
3. *Trup*. To je uobičajen, ali nepouzdan postupak zato što trup nije kruto tijelo; dijelovi trupa se mogu gibati relativno jedan u odnosu na drugi

Najčešći lokalni referentni sustavi bazirani na mehaničkim točkama i osima su (a) glavni tjelesni sustavi i (b) tzv. sustav podijele tijela („split-body“). U glavnim tjelesnim sustavima, ishodište sustava je u težištu tijela i referentne osi su orijentirane u smjeru glavnih osi tromosti. S takvim lokalnim referentnim sustavom, matematičke jednadžbe gibanja tijela poprimaju najjednostavniju formu. To je ujedno i glavna prednost referentnih sustava. Međutim, nije prikladno učvrstiti glavni tjelesni sustav unutar tijela jer je potrebno poznavati položaj svih dijelova tijela i potrebno je izvršiti složene proračune. Također, glavne osi ne mogu biti definirane ako su dva glavna momenta tromosti jednaka. To se može dogoditi npr. kada tijelo čovjeka (gimnastičara) zauzme „šiljati“ položaj u zraku (Slika1.6C.).

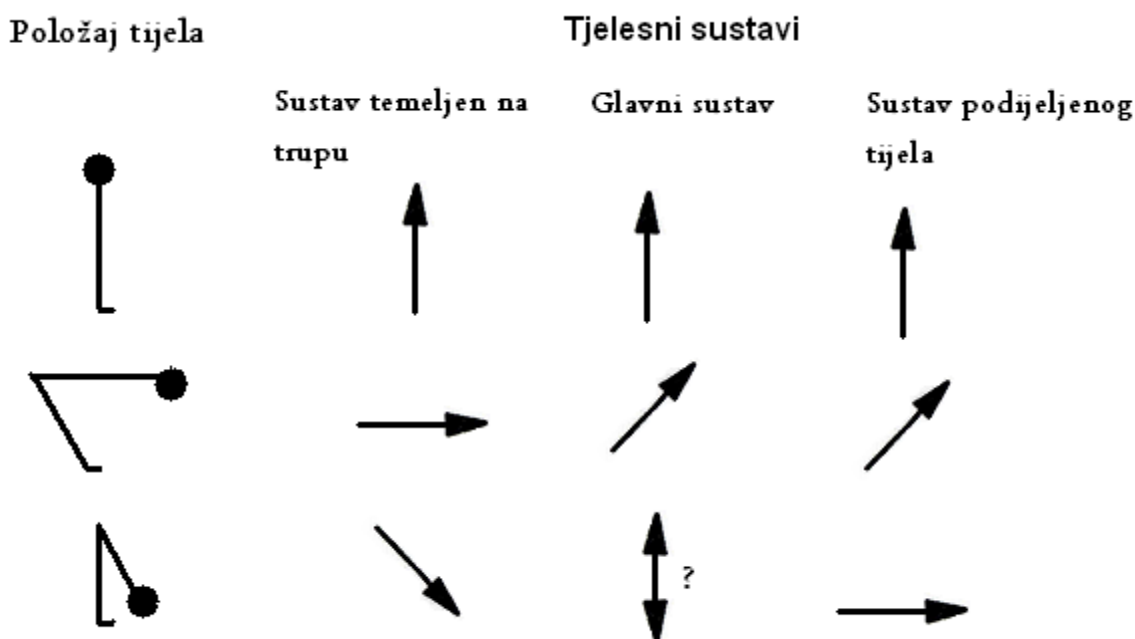


Slika 1.6. Elipse inercije za različite položaje ljudskog tijela u zraku  
A – uspravni položaj, B – prijelazni položaj, C – „šiljati“ položaj

Glavne osi momenta tromosti ne mogu biti definirane za srednji položaj-B (slika 1.6). Kod tog položaja, maksimalni i minimalni momenti tromosti su jednaki pa elipsa inercije prelazi u kružnicu. Položaji s jednakim momentima tromostima u odnosu na različite osi, često se povezuju s iskusnim gimnastičarima koji izvode složene zračne rotacije

U metodi „podijeljenog tijela“, tijelo je podijeljeno u gornje i donje dijelove. Potom se određuje težište za svaki dio tijela. Prva os referentnog sustava nalazi se uzduž linije koja spaja odabrana težišta. Ishodište referentnog sustava nalazi se u ukupnom težištu masa – težištu cijelog tijela. Druga os usmjerena je duž lateromedijalne osi zdjelice. Treća os se dobiva kao vektorski umnožak prvih dviju osi. Sustav „podijeljenog tijela“ je miješani sustav baziran na mehaničkim i anatomskim točkama: linije koje spajaju težišta gornjih i donjih dijelova tijela i lateromedijalne osi zdjelice. Taj sustav ne uzima u obzir mogućnost relativne rotacije zdjelice u odnosu na rameni pojas s obzirom na uzdužnu os tijela. Rotacija zdjelice podrazumijeva rotaciju cijelog tijela. Stoga, treba biti vrlo oprezan kada se koristi ova metoda u analiziranju gibanja kao što je npr. salto. Sljedeći nedostatak ove metode je taj što se u nekim pozama referentne osi ne podudaraju s glavnim osima tromosti. Da bi se opisala rotacija tijela ne samo da se trebaju znati glavni momenti tromosti već i njihov produkt. Ta metoda je, ipak, pogodna za promatranje rotacije tijela oko frontalne osi.

Kada se koriste različiti tjelesni sustavi, pretpostavke položaja tijela u prostoru mogu se razlikovati. Na primjer, kada se koristi tjelesni sustav trupa, poza prikazana ranije na slici 1.6C., uspoređena s pozom prikazanom na slici 1.6A., može se smatrati kao rotacija u smjeru kazaljke na satu za  $90^\circ$ . Sa sustavom „podijeljenog tijela“ rotacija je  $0^\circ$ . Promotrimo još jedan primjer. Zamislimo čovjeka koji savija trup iz uspravne pozicije (slika 1.7). Pitanje je, da li tijelo kao entitet rotira ili ne. Odgovor na to pitanje je različit za različite tjelesne sustave. Ako se koristi tjelesni sustav baziran na trupu čovjeka, orijentacija tijela u sagnutom položaju razlikuje se od početne poze za kut od skoro  $180^\circ$ . Orijentacija tijela kod takve poze u sustavu podijele tijela je  $90^\circ$ , i orijentacija u glavnom sustavu nije precizno definirana.

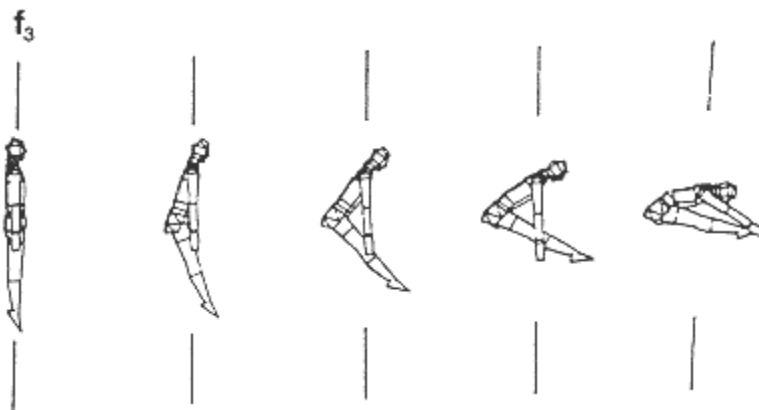


Slika 1.7. Orijentacija tijela u prostoru prikazana strelicama za različite lokalne referentne sustave

#### 1.2.2.1 Sustav „podijeljenog tijela“

Definirat ćemo sljedeći sustav. Prva os je uzduž linije koja spaja centar lijevog i desnog kuka. Treća os prolazi srednjom točkom centara koljena i srednjom točkom centara ramena. Druga os proizlazi iz vektorskog produkta prve i treće osi.

Slika 1.8 prikazuje ljudsko tijelo koje izvodi skok u „šiljati“ položaj pri čemu je kinetički moment jednak 0. Os  $f_3$  koja prolazi linijom koljeno – rame, ostaje približno 0 tijekom skoka. Ako bi os bila definirana kao longitudinalna os trupa, kut sagiba bi se povećao s  $0^\circ$  do  $90^\circ$ . Stoga, predloženi sustav bolje predstavlja orijentaciju cijelog tijela nego sustav samo jednoga određenog segmenta tijela.



Slika 1.8. Orijentacija koljeno-rame osi ( $f_3$ ) tijekom skoka

### 1.2.3 Indirektna metoda definiranja orijentacije tijela

Da bi se izbjegle poteškoće koje se pojavljuju kod promjene položaja tijela, često se koristi indirektna metoda definiranja orijentacije tijela u prostoru za vrijeme gibanja tijela kroz zrak. Ova metoda se temelji na zakonu održanja kinetičkog momenta,  $K = \mathcal{I}\omega$ , gdje je  $K$  kinetički moment,  $\omega$  je kutna brzina, i  $\mathcal{I}$  je moment tromosti oko iste osi. Prema zakonu, ako se zanemari otpor zraka  $K$  se ne mijenja tijekom leta sve dok na sustav ne djeluje vanjski moment. Zbog toga što je produkt  $K = \mathcal{I}\omega$  konstantan u letu kroz zrak,  $\mathcal{I}$  može biti određen za bilo koju konfiguraciju zglobova te se kutna brzina  $\omega$  može jednostavno odrediti.

Za ravninsko gibanje i kada su poznate trenutačne vrijednosti  $\omega$ , moguće je odrediti orijentaciju tijela, također kao i kutni pomak  $\epsilon$ .

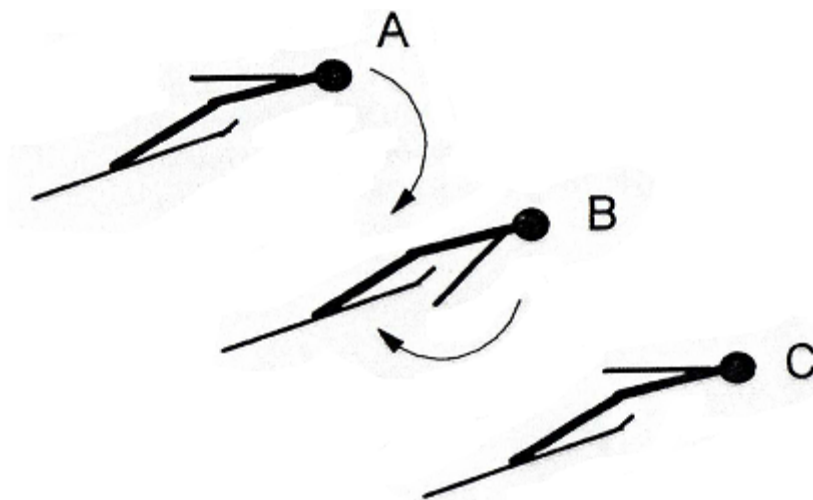
$$e = (K / J) \cdot t \quad (1.1)$$

gdje  $t$  predstavlja vrijeme.

Unatoč činjenici da kutna brzina, kutni pomak, i orijentacija tijela formalno mogu biti izračunate pomoću indirektna metode, ostaje nejasno što ustvari rotira zato što lokalni tjelesni sustav nije definiran. Indirektna metoda funkcionira jako dobro u nekim slučajevima, na primjer, u opisu salta unaprijed.

#### 1.2.4 Što je „rotacija tijela“?

Poteškoće na koje nailazimo kod odabira tjelesnog sustava koordinata nisu samo tehničke prirode. Oni također proizlaze iz mnogo fundamentalnijih problema: kao na primjer kako definirati rotaciju sustava koji se sastoji od nekoliko spojenih dijelova, kao što je ljudsko tijelo. Zamislite skijaškog skakača koji maše rukama dok leti u zraku kako ne bi izgubio ravnotežu. Da li on rotira? Ili, skakač rotira rukama da bi spriječio rotaciju tijela? Nakon nekoliko zamahaja rukama, skakač poprima položaj i orijentaciju jednaku početnoj (slika 1.9.). Da li je on rotirao? Ako da, koliki je kutni pomak?



Slika 1.9. Prikaz skijaškog skakača

Odgovori na ta pitanja ovise o definiciji rotacije. Ako je definicija bazirana na ideji kinetičkog momenta, nije bitno da li svi dijelovi tijela ili samo neki vrše rotaciju. Ako se kinetički moment razlikuje od nule i neki dijelovi tijela, recimo ruke, rotiraju, kažemo da cijeli sustav rotira, iako nagib tijela ostaje isti ili se malo promijeni. Međutim, ako je rotacija tijela definirana kao rotacija tjelesnog sustava koji se nalazi na tijelu, rotacija ovisi o odabranom sustavu. Ako se koristi tjelesni sustav baziran na anatomiji tijela, skakač nije promijenio svoj položaj u prostoru.

### 1.2.5 Opisivanje položaja i pomaka

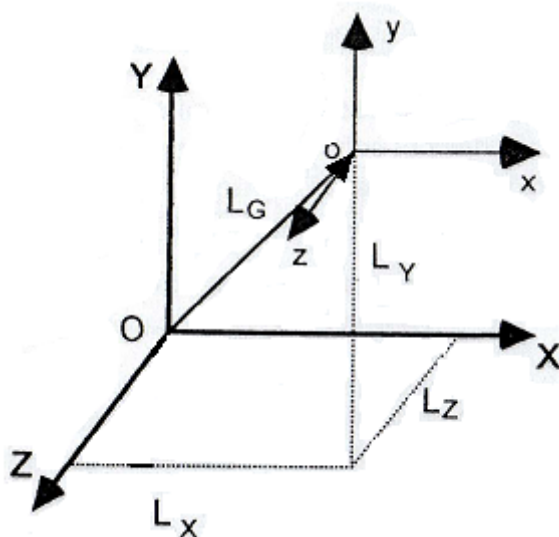
Kod gibanja referentnog globalnog sustava koji je učvršćen na tijelo, njegova orijentacija u odnosu na globalni sustav može se odrediti pomoću: matrične metode i Eulerove metode.

#### 1.2.5.1 Matrična metoda

S ovom metodom može se odrediti translacija i rotacija lokalnog sustava u odnosu na globalni sustav. Stoga se mogu lagano opisati položaj objekta u različitim trenucima te pomaci objekta.

##### 1.2.5.1.1 Relativna orijentacija lokalnog i globalnog sustava

**Položaj.** Definiranje položaja je jednostavno ( slika 1.10.). Neka  $O$ -XYZ i  $o$ -xyz budu globalni odnosno lokalni sustav koordinata. Ako je  $\mathbf{L}_g$  vektor ishodište lokalnog sustava u globalnom sustavu, komponente toga vektora  $L_x, L_y$  i  $L_z$  definiraju položaj lokalnog sustava i mogu biti napisane kao elementi stupčaste matrice  $[L_x \ L_y \ L_z]^T$ . Translacija iz točke  $O$  u točku  $o$  definiran je istim komponentama  $L_x, L_y$  i  $L_z$ .



Slika 1.10. Čista translacija je definirana s tri komponente vektora  $L$ .  
Velika tiskana slova označavaju globalni sustav, a mala lokalni  
Koordinatni sustav

**Rotacija.** Svaki jedinični vektor ( $x, y, z$ ) lokalnog sustava zastupljen je u globalnom referentnom sustavu pomoću svojih komponenta kao što je prikazano na slici 1.11. Dijeleći svaku komponentu s dužinom vektora, dobivamo kosinus kuta vektora i svake pojedine koordinatne osi globalnog sustava. Ti kutovi se nazivaju *kutovi smjera*, a kosinusi su preimenovani u *kosinuse smjera* (slika 1.11.). Kosinusi smjera mogu biti zapisani u matričnoj formi kao elementi 3x3 matrice. Velika tiskana slova označavaju osi globalnog sustava, a mala slova označavaju osi lokalnog sustava. Uobičajeno je koristiti brojeve umjesto slova u označavanju referentnih os. Matrica kosinusa ili matricu rotacije  $[R]$  može se zapisati na sljedeći način:

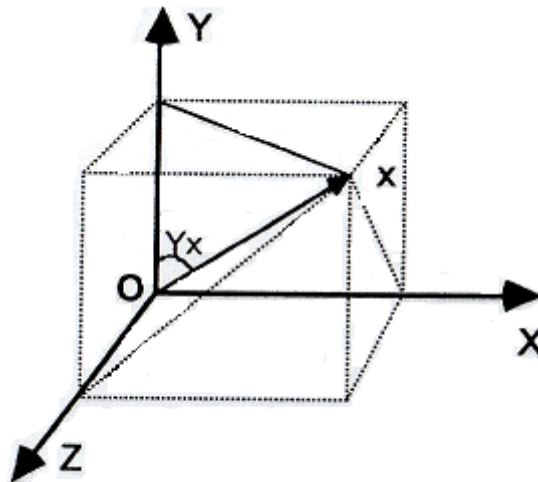
$$[R] = \begin{bmatrix} \cos_{Xx} & \cos_{Xy} & \cos_{Xz} \\ \cos_{Yx} & \cos_{Yy} & \cos_{Yz} \\ \cos_{Zx} & \cos_{Zy} & \cos_{Zz} \end{bmatrix}$$



Ili

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos_{11} & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{21} & \cos_{22} & \cos_{23} \\ \cos_{31} & \cos_{32} & \cos_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

U ovoj notaciji npr.  $\cos_{23}$  znači kosinus kuta koji zatvaraju druga os globalnog referentnog sustava i treća os lokalnog sustava. Stupci rotacijske matrice su 3 x 1 jedinični vektori, a predstavljaju orijentaciju lokalnih referentnih osi u globalnom sustavu. Stupci se podudaraju s osima lokalnog sustava, a redci rotacijske matrice odgovaraju osima globalnog koordinatnog sustava.



Slika 1.11. Komponente jediničnog vektora x u globalnom referentnom sustavu

**Translacija i rotacija.** Položaj lokalnog sustava u odnosu na globalni sustav može se izraziti kao slijed translacije i rotacije opisane stupcem  $3 \times 1$  matrice za translaciju i  $3 \times 3$  matrice kosinusa smjera za rotaciju. Dodavanjem novog reda  $(1,0,0,0)$ , možemo napisati novu  $4 \times 4$  maticu. Ta matrica se naziva matrica položaja ili matrica transformacije  $[T]$ , uključuje matrice translacije i rotacije lokalnog referentnog sustava u odnosu na globalni sustav.

Matrica glasi:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_x & \cos_{Xx} & \cos_{Xy} & \cos_{Xz} \\ L_y & \cos_{Yx} & \cos_{Yy} & \cos_{Yz} \\ L_z & \cos_{Zx} & \cos_{Zy} & \cos_{Zz} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Na ovaj način može se odrediti položaj bilo kojeg koordinatnog sustava u odnosu na drugi.

Matrica transformacije sastoji se od:

- Stupčaste matrice  $3 \times 1$  koja daje položaj ishodišta jednog koordinatnog sustava u odnosu na drugi
- Matrica rotacije  $3 \times 3$  koja sadrži 9 kosinusa smjera
- Matrica  $1 \times 4$  zbog matematičke prikladnosti

Matrica  $[T]$  opisuje bilo koji položaj lokalnog koordinatnog sustava. Ako je lokalni sustav pričvršćen na kruto tijelo, matrica  $[T]$  je jednaka za sve točke na tijelu. Ali, za svaku novu poziciju tijela dobivamo i novu maticu.

### 1.2.5.1.2 Definiranje položaja u dva referentna koordinata sustava (koordinatna transformacija ili Alias (pseudo) problem)

Kada je neka točka zadana njezinim radij - vektorom u jednom koordinatnom sustavu (sve tri komponente vektora su poznate), položaj te točke u odnosu na drugi koordinatni sustav može se pronaći u slučaju da poznajemo translacijsku matricu i matricu rotacije.

**Čista translacija.** Ako su koordinate točke P u lokalnom sustavu  $P_x, P_y, P_z$  predstavljene matricom  $[P_L]$  i ako je položaj lokalnog sustava u odnosu na globalni zadan pomoću matrice  $[L_G]$ , položaj točke P u globalnom sustavu određen je matricom  $[P_G]$ .

$$[P_G] = [L_G] [P_L] \quad [P_G]$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_x + P_x \\ L_y + P_y \\ L_z + P_z \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

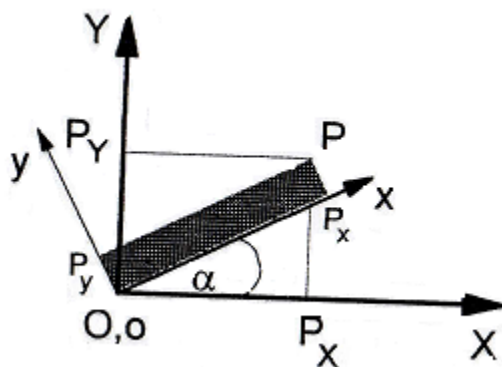
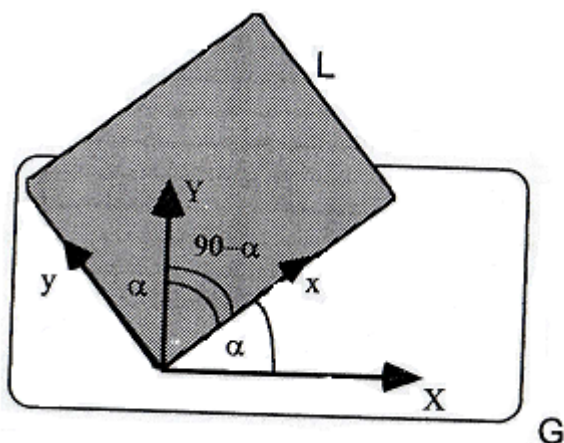
ili

$$\begin{bmatrix} 1 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_x & 1 & 0 & 0 \\ L_y & 0 & 1 & 0 \\ L_z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ L_x + P_x \\ L_y + P_y \\ L_z + P_z \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Više je uobičajenije prikazati translaciju kroz množenje nego kroz zbrajanje matrica. Da bi se to napravilo upotrebljava se 4 x 4 matrica  $[L_G]$  umjesto 3 x 1 matrica, a matrice  $[P_L]$  i  $[P_G]$  su zapisane kao 4 x 1 matrice s jedinicom kao prvim elementom.

Prednost ovog pristupa je opisivanje translacije i rotacije zajedno pomoću jedne matematičke operacije, tj. produkta matrica.

**Rotacija.** Ako se razmotri prvo čista rotacija oko referentnih osi, recimo oko osi Z, rotacija se zbiva u XY ravni. Vektor **P** je dan pomoću njegovih komponenti u lokalnom sustavu (slika 1.12.). Problem je naći komponente u globalnom sustavu.



Slika 1.12. Gornja slika prikazuje rotaciju lokalnog sustava L u odnosu na globalni sustav G. U donjoj slici prikazana je točka P u globalnom i lokalnom sustavu

Kosinus smjera osi  $x$  lokalnog sustava, u odnosu na  $X$  i  $Y$  osi globalnog sustava, je  $\cos \alpha$  i  $\cos (90^\circ - \alpha)$ . Kosinus smjera osi  $y$  s obzirom na osi  $X$  i  $Y$  je  $\cos (90^\circ + \alpha)$  i  $\cos \alpha$ . Množeći komponente vektora **P** u lokalnom sustavu, koje poznajemo, s njihovim

kutovima smjera, možemo izračunati komponente vektora  $\mathbf{P}$  uzduž  $X$  i  $Y$  osi u globalnom sustavu. Komponente vektora  $\mathbf{P}$  uzduž tih osi su:

$$\begin{aligned} P_x &= P_x \cos \alpha + P_y \cos (90^\circ + \alpha) \\ P_y &= P_x \cos (90^\circ - \alpha) + P_y \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.6)$$

Koristeći matrični zapis, gornje jednadžbe možemo zapisati kao:

$$[R_G] = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) \\ \cos(90^\circ - \alpha) & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = [R] \cdot [P_L] \quad (1.7)$$

gdje su  $[P_G]$  i  $[P_L]$  stupci matrice komponenta vektora  $\mathbf{P}$  u globalnom i lokalnom referentnom sustavu, i  $[R]$  je matrica rotacije. Elementi u stupcima matrice  $[R]$  su kosinusi smjera lokalnih referentnih osi u odnosu na osi globalnog koordinatnog sustava. Matrica rotacije može se također zapisati i kao :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Na primjer, rotiranjem lokalnog referentnog sustav oko  $Z$  osi pod kutom  $\alpha$  točka  $P(1,0)$  prelazi u:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

U trodimenzionalnom sustavu, vektor zadan pomoću svojih komponenti u lokalnom referentnom sustavu, također može biti izražen pomoću svojih komponenti u globalnom sustavu ako poznajemo kosinuse smjera:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos_{Xx} & \cos_{Xy} & \cos_{Xz} \\ \cos_{Yx} & \cos_{Yy} & \cos_{Yz} \\ \cos_{Zx} & \cos_{Zy} & \cos_{Zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = [P_G] = [R][P_G] \quad (1.10)$$

Za transformaciju koordinata vektora danog u globalnom sustavu u lokalni sustav, trebamo koristiti transponiranu matricu matrice R:

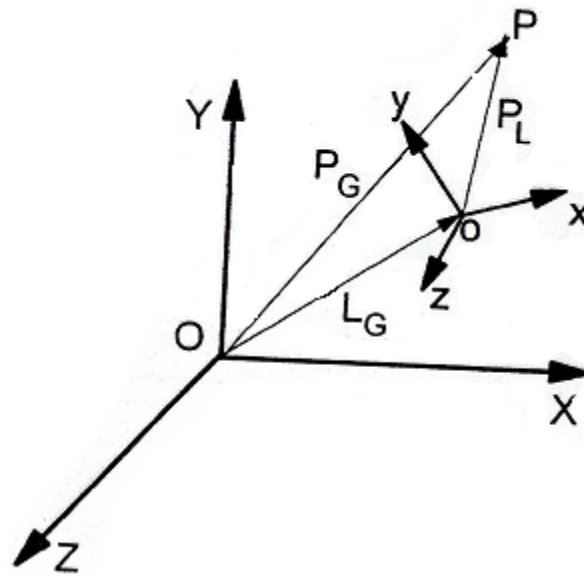
$$[P_L] = [R]^T [P_G] \quad (1.11)$$

Iz jednačba 1.10 i 1.11 slijedi:

$$[R]^T [R] = [I] \quad (1.12)$$

Stoga,  $[R]^T = [R]^{-1}$  i matrica  $[R]$  je ortogonalna matrica. Također je i ortonormalna matrica zato što svi vektori stupca imaju jediničnu dužinu. Determinanta matrice R jednak je +1. Ortogonalne matrice čija je determinanta jednaka +1 nazivaju se još i pravilno ortogonalne matrice.

**Translacija i rotacija.** Ako je referentni sustav povezan s drugim pomoću translacije i rotacije i položaj točke P je zadan vektorskim komponentama u lokalnom referentnom sustavu, položaj točke u globalnom sustavu može se izraziti ako su poznate matrice translacije i rotacije. Položaj točke **P** u globalnom koordinatnom sustavu je vektorski zbroj vektora **L<sub>G</sub>**, koji označava središte lokalnog sustava u globalnom sustavu, i vektora **P<sub>L</sub>** (slika1.13).



Slika 1.13. Položaj točke P u globalnom sustavu

Prije nego li se ta dva vektora mogu zbrojiti, moraju se izraziti u globalnom sustavu.

$$\mathbf{P}_G = \mathbf{L}_G + [\mathbf{R}] \mathbf{P}_L \quad (1.13)$$

Ili

$$\begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_X \\ L_Y \\ L_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos_{Xx} & \cos_{Xy} & \cos_{Xz} \\ \cos_{Yx} & \cos_{Yy} & \cos_{Yz} \\ \cos_{Zx} & \cos_{Zy} & \cos_{Zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

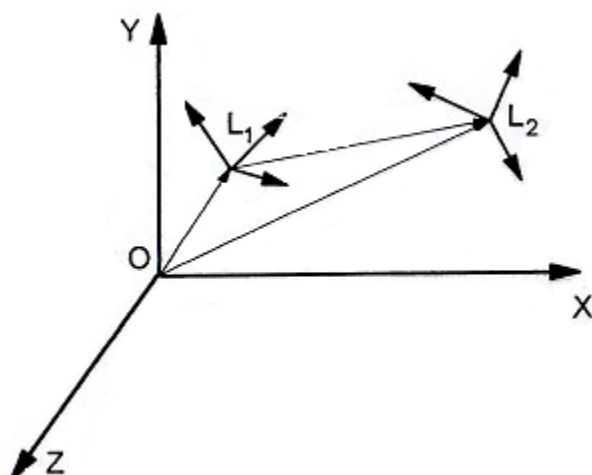
Jednadžbe (1.13) i (1.14) omogućavaju transformaciju iz lokalnog sustava L u globalni, G. Transformacija je dana u obliku vektora  $\mathbf{L}_G$ , koji predstavlja položaj središta lokalnog sustava u odnosu na globalni sustav, i matrice  $[\mathbf{R}]$ , koja predstavlja orijentaciju lokalnog sustava. Koristeći matricu transformacije  $[\mathbf{T}]$ , translaciju i rotaciju može se istovremeno prikazati pomoću jednog vektorskog množenja:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_x & \cos_{Xx} & \cos_{Xy} & \cos_{Xz} \\ L_y & \cos_{Yx} & \cos_{Yy} & \cos_{Yz} \\ L_z & \cos_{Zx} & \cos_{Zy} & \cos_{Zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

#### 1.2.5.1.3 Definiranje pomaka ( Alibi problem)

Slika 1.14 prikazuje lokalni sustav L, koji mijenja svoj položaj u prostoru. Njegov početni položaj u globalnom sustavu opisuje matrica  $[\mathbf{T}_{G1}]$ . Njegov konačni položaj, položaj 2, u odnosu na globalni sustav definiran je maticom  $[\mathbf{T}_{G2}]$ . U odnosu na početni položaj 1, položaj 2 je definiran maticom  $[\mathbf{T}_{12}]$ . Matrica pomaka  $[\mathbf{D}_{12}]$ , koja povezuje globalne koordinate položaja 1 i 2, također može biti definirana. Treba primijetiti da je tu nova matrica  $[\mathbf{T}_G]$ , za svaki položaj lokalnog sustava; međutim, za zadani položaj matrica  $[\mathbf{T}_G]$  je jednaka za sve točke na tijelu kojima je pridružen lokalni sustav L. Često se, matrica  $[\mathbf{T}_{G1}]$  naziva matrica pomaka, a matrica  $[\mathbf{T}_{12}]$  matrica transformacije. Matrica  $[\mathbf{T}_{G1}]$  definira početni položaj lokalnog sustava, a matrica  $[\mathbf{T}_{12}]$  definira transformaciju iz početnog u konačni položaj. Ako se pojavljuje samo rotacija, matrice  $[\mathbf{R}_{G1}]$  i  $[\mathbf{R}_{12}]$  nazivaju se matrica orijentacije i matrica rotacije. Matrica  $[\mathbf{R}_{G1}]$  definira orijentaciju lokalnog sustava u odnosu na referentni položaj  $[0, 0, 0]$ . Matrica  $[\mathbf{R}_{12}]$  definira rotaciju iz položaja 1 u položaj 2.





Slika 1.14. Pomak lokalnog sustava L iz točke 1 u točku 2

Od četiri spomenute transformacijske matrice,  $[T_{G1}]$ ,  $[T_{G2}]$ ,  $[T_{12}]$  i  $[D_{12}]$ , dvije su uvijek zadane, a dvije su nepoznate. Tipična su tri problema:

1. Koji je konačni položaj lokalnog sustava u odnosu na globalni sustav  $[T_{G2}]$ , kada su poznati početni položaja  $[T_{G1}]$  i relativni položaj  $[T_{12}]$ ?
2. Zadani su početni  $[T_{G1}]$ , i konačni  $[T_{G2}]$ , položaj. Koji je relativni položaj  $L_2$  u odnosu na  $L_1$ , drugim riječima, koliki je  $[T_{12}]$ ?
3. Zadani su  $[T_{G1}]$  i  $[T_{G2}]$ . Koliki je pomak  $[D_{12}]$  izražen u globalnom sustavu?

Rješenja ovih problema su sljedeća:

1. Bilo koji položaj lokalnog sustava L u odnosu na globalni sustav može se promatrati kao pomak L iz početnog položaja, koji se poklapa s globalnim referentnim sustavom G, u konačni položaj. Stoga, konačni položaj se može smatrati kao kompozicija (spajanje) dvaju pomaka;  $G \rightarrow L_1 \rightarrow L_2$ , gdje strelica označava pomak, ili, u matičnom obliku

$$[T_{G2}] = [T_{G1}][T_{12}] \quad (1.16)$$

Općenito, spajanje nekoliko pomaka prikazuje se množenjem odgovarajućih transformacijskih matrica:

$$[T] = [T_{G1}] \cdot [T_{12}], \dots, [T_{(n-1)n}] \quad (1.17)$$

gdje je  $n$  broj pomaka. Da bi upotrijebili jednadžbe (1.16) i (1.17), koordinate  $(x, y, z)$  trebale bi se izmjeriti u lokalnom koordinatnom sustavu. Stoga, homogena transformacija  $[T_{(k-1)k}]$  primijenjena je na podatke izmjerene u  $L_k$  lokalnom referentnom sustavu. Ta transformacija konvertira podatke u  $L_{k-1}$  referentni sustav.

Kada je koordinatna transformacija čista rotacija, umjesto jednadžbe (1.16) može se napisati:

$$[R_{G2}] = [R_{G1}] [R_{12}] \quad (1.18)$$

Rotacija  $[R_{12}]$  je izvedena oko osi lokalnog referentnog sustava  $L_1$ . Kao rezultat, lokalni sustav  $L_2$  podudara se s lokalnim sustavom  $L_1$ . Matrica  $[R_{G1}]$  je matrica orijentacije, ona definira orijentaciju lokalnog sustava  $L_1$  u globalnom sustavu  $G$ . Stoga, množenje matrice orijentacije, na primjer,  $[R_{G1}]$  s matricom rotacije,  $[R_{12}]$ , označava rotaciju oko osi lokalnog koordinatnog sustava. Kada je slijed rotacija promijenjen,

$$[R_{G2}]' = [R_{12}][R_{G1}] \quad (1.19)$$

rotacija opisana pomoću matrice  $[R_{G1}]$ , dovodi referentni sustav  $L_1$  u isti položaj, ili zauzima isti prostor kao i globalni sustav  $G$ . Rotacija je očito izvedena oko globalnog koordinatnog sustava. Nakon rotacije, osi sustava  $L_1$  i  $G$  se podudaraju, i kasnija rotacija,  $[R_{12}]$  je također izvedena oko osi globalnog sustava. Stoga, množenje matrice orijentacije s matricom rotacije predstavlja rotaciju oko osi globalnog sustava. To je jedna od glavnih osobina matrice rotacije: (1) kada se matrica rotacije nalazi prije matrice orijentacije, označava rotaciju oko osi globalnog referentnog sustava, i (2) kada se matrica rotacije nalazi iza matrice orijentacije, označava rotaciju oko osi lokalnog sustava. Općenito,  $[R]$  i  $[R']$  nisu iste matrice, one definiraju različite rotacije.

2. Kada su globalne koordinate  $L$  dostupne u položaju 1 i 2, može se naći matrica relativnog položaja  $[T_{12}]$ . Iz jednadžbe (1.16) slijedi:

$$[T_{12}] = [T_{G1}]^{-1} [T_{G2}] \quad (1.20)$$

Ova matrica transformira lokalne koordinate iz sustava  $L_2$  u koordinate lokalnog sustava  $L_1$ . Primjenjujući jednadžbu (1.15) možemo zapisati:

$$[P_L]_1 = [T_{12}] [P_L]_2 \quad (1.21)$$

gdje su  $[P_L]_1$  i  $[P_L]_2$  koordinate točke  $P$  u lokalnom referentnom sustavu  $L_1$  i  $L_2$ .

3. Da bi se napisala matrica pomaka  $[D_{12}]$ , koja transformira globalne koordinate položaja 1 u globalne koordinate položaja 2, analiziraju se sljedeće jednadžbe:

$$[P_G]_1 = [T_{G1}] [P_L]_1 \quad (1.22)$$

$$[P_G]_2 = [T_{G2}] [P_L]_2 \quad (1.23)$$

gdje su  $[P_G]_1$  i  $[P_G]_2$  globalne koordinate točke  $P$  za položaje 1 i 2, a  $[P_L]_1$  i  $[P_L]_2$  su lokalne koordinate točke. Iz razloga što su a  $[P_L]_1$  i  $[P_L]_2$  identični u svim lokalnim sustavima, mogu se zapisati kao  $[P_L]$ . Stoga se jednadžba (1.22) može zapisati kao:

$$[P_L] = [T_{G1}]^{-1} [P_G]_1 \quad (1.24)$$

Supstitucijom jednadžbe (1.24) u (1.23) dobivamo sljedeće:

$$[P_G]_2 = [T_{G2}] [T_{G1}]^{-1} [P_L]_1 \quad (1.25)$$

Matrica pomaka,  $[D_{12}]$ , se može izračunati pomoću:

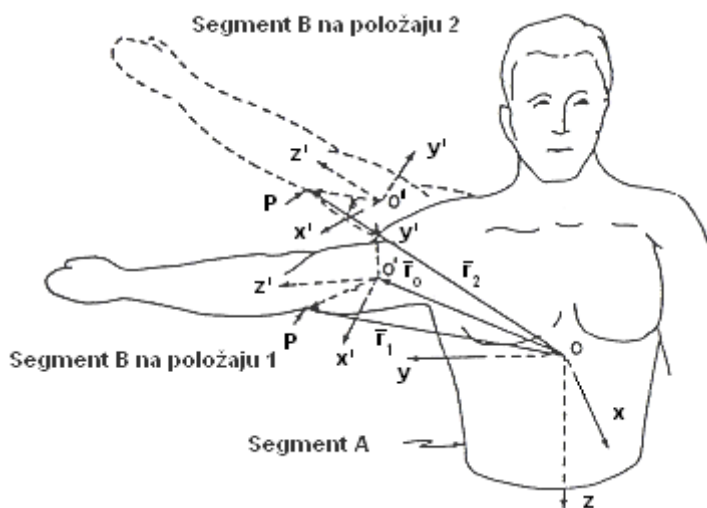
$$[D_{12}] = [T_{G2}] [T_{G1}]^{-1} \quad (1.26)$$

Sažeto, matrice transformacije mogu predstavljati:

- Položaj lokalnog sustava L u odnosu na globalni sustav G
- Transformaciju koordinata iz L koordinata u G koordinate
- Pomak tijela iz jedne pozicije u drugu te niz pomaka

U biomehanici gibanja ljudskog tijela, globalni referentni sustavi su proizvoljno pridodati okolišu tijela, a lokalni sustavi dijelovima tijela. Kada se uzastopne promjene orijentacija ljudskog tijela definiraju u odnosu na globalni sustav, često se nazivaju rotacija segmenta ili kosti. Kada se isti pokret opisuje u odnosu na lokalni sustav koji je fiksiran na nekom segmentu ljudskog tijela, naziva se rotacija zgloba.

#### 1.2.5.1.3.1 Opisivanje gibanja ruke pomoću matrične metode



Slika 1.15. Gibanje ruke (segment B) u odnosu na torzo (segment A) u trodimenzionalnom prostoru.

Opisano je relativno gibanje ruke u odnosu na torzo (slika 1.15). Kretanja je kombinacija rotacije i translacije. Zbog kinematičke analize, pretpostavljeno je da se ruka i trup ponašaju kao kruta tijela. Nepokretni koordinatni sustav,  $O - XYZ$ , pričvršćen je na torzo (segment A). Lokalni koordinatni sustav,  $O' - x'y'z'$ , pričvršćen je na ruku (segment B). Položaj bilo koje točke P na segmentu B određen je vektorima  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}_1$  u položaju 1, a  $\mathbf{r}_2$

u položaju 2). Zbog toga što se točka P nalazi na dijelu tijela koje se giba, vektor  $\mathbf{p}$  ostaje konstantan u sustavu  $o' - x'y'z'$ , dok se vektor  $\mathbf{r}$  u sustavu  $O - XYZ$  mijenja kod gibanja ruke u odnosu na torzo.

Početni položaj točke P u nepokretnom sustavu dan je sljedećom jednačinom:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + [\mathbf{R}_1] \cdot \mathbf{p}$$

gdje je  $[\mathbf{R}_1]$  3 x 3 matrica rotacije koja predstavlja orijentaciju koordinatnog sustava  $o' - x'y'z'$  u položaju 1 u odnosu na nepomični referentni sustav, a  $\mathbf{r}_0$  predstavlja translaciju koordinatnog sustava  $o' - x'y'z'$  u odnosu na nepomični referentni sustav. Za položaj 2, jednačina glasi:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + [\mathbf{R}_2] \cdot \mathbf{p}$$

Koordinate točke P u položaju 2 mogu se izraziti i preko koordinata položaja 1

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12} + [\mathbf{R}_{12}] \cdot \mathbf{p}$$

gdje se indeksi 12 odnosi na translaciju i rotaciju od položaja 1 do položaja 2.

Zadnja transformacija se može zapisati u homogenom obliku kao:

$$\mathbf{r}_2 = [\mathbf{D}_{12}] \cdot \mathbf{r}_1$$

gdje je  $[\mathbf{D}_{12}]$  4 x 4 matrica pomaka.

**1.2.5.1.4 Projekcijski kutovi**

Umjesto kutova smjera, mogu se koristiti projekcijski kutovi. U nekim zadacima, jednostavnije je izmjeriti projekcijske kutove nego kutove smjera. Projekcijski kutovi formirani su pomoću (a) projekcije vektora na ortogonalnu ravninu globalnog referentnog sustava i (b) osi tog sustava.

Tangensi projekcijskih kutova mogu se jednostavnije prikazati pomoću kosinusa smjera. Na primjer, za os  $x$  lokalnog referentnog sustava tangens glasi:

$$\begin{aligned}\tan (YZ)_x &= Z / Y = \cos (Zx) / \cos (Yx) \\ \tan (YX)_x &= Y / X = \cos (Yx) / \cos (Xx) \\ \tan (XZ)_x &= X / Z = \cos (Xx) / \cos (Zx)\end{aligned}\tag{1.27}$$

gdje su  $\tan (YZ)_x$ ,  $\tan (YX)_x$ ,  $\tan (XZ)_x$  tangensi projekcijskih kutova osi  $x$  s ravninama  $YZ$ ,  $YX$  i  $XZ$ , a  $\cos (Xx)$ ,  $\cos (Yx)$  i  $\cos (Zx)$  su kosinusi smjera kutova formiranih od osi  $x$  lokalnog sustava i osi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Ako su kutovi smjera poznati, odgovarajući projekcijski kutovi mogu se jednostavno pronaći pomoću jednadžbi (1.27). Projekcijski kutovi nisu nezavisni. Iz jednadžbe (1.27) slijedi

$$\tan (YZ)_x \cdot \tan (YX)_x \cdot \tan (XZ)_x = Z/Y \cdot Y/X \cdot X/Z = 1\tag{1.28}$$

Stoga, samo dva projekcijska kuta od tri se mogu odabrati proizvoljno. Jednadžba (1.28) predstavlja ograničenja projekcijskih kutova. Sveukupno postoji devet projekcijskih kutova. Samo tri od njih su nezavisna. Kada su projekcijski kutovi zadani (izmjereni), kosinusi smjera mogu se lagano izračunati. Nakon toga, matrica rotacije se koristi na uobičajen način. Ovaj način je uobičajen u eksperimentalnom istraživanju.

Matrična metoda je osnovni matematički alat koji se primarno koristi za izračun položaja i/ili gibanja tijela. Ipak, ova metoda nije prikladna za trenutnu interpretaciju relativnog gibanja između dva tijela. Devet kosinusa smjera je ipak previše, zato što se položaj

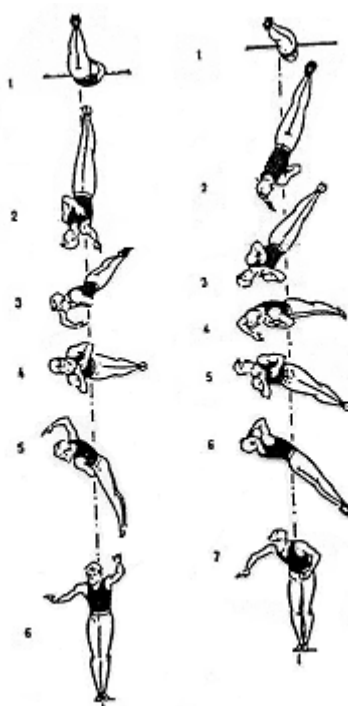
tijela u prostoru može opisati s manjim brojem kutova. Tri nezavisna kuta, ( koji odgovaraju trima rotacijskim stupnjevima slobode), trebaju biti određeni. Ti kutovi se nazivaju Eulerovi kutovi.

### **1.2.5.2 Eulerova metoda**

Rotacije nisu komutativne (  $a \cdot b \neq b \cdot a$ ), drugim riječima, moraju se izvesti u točno određenom redoslijedu. Promjena orijentacije može se opisati kao niz tri uzastopne rotacije iz početnog položaja, gdje se dva referentna sustava G i L podudaraju. Eulerovi kutovi su definirani kao ta tri uzastopna kuta rotacije oko zadanih osi.

Promotrimo sad gimnastičara koji izvodi salto s okretom, izvodi ga u trenutku silaska s horizontalnog vrtila. Tijelo gimnastičara (slika 1.16) izvodi sljedeće rotacije:

- a) Rotira oko osi koja je paralelna s vrtilom. Treba primijetiti da ta os ne može biti nazvana frontalna os zato što je frontalna os definirana relativno prema tijelu, ne prema okolišu. Os rotacije se podudara s frontalnom osi tijela gimnastičara samo ponekad i ne mijenja orijentaciju u globalnom referentnom sustavu. Dakle, prva rotacija se događa relativno u odnosu na os definiranu u globalnom referentnom sustavu. Ta rotacija se naziva *precesija*.
- b) Naginjanje prema unaprijed i unatrag u odnosu na sagitalnu ravninu. Ova kretnja se naziva *nutacija ili tilt*. Os nutacije, doduše, nije učvršćena u odnosu na globalni referentni sustav i lokalni referentni sustav ( za tijelo atletičara); stoga, ponekad se naziva „ploveća“ os. Ta os je uvijek ortogonalna na prvu i na treću os.
- c) Rotira oko svoje longitudinalne osi. Ta os mijenja orijentaciju u prostoru, ali je fiksirana s tijelom atletičara. To se naziva *rotacija* (spin ili okret).



Slika 1.16. Dva različita doskoka s vrtila

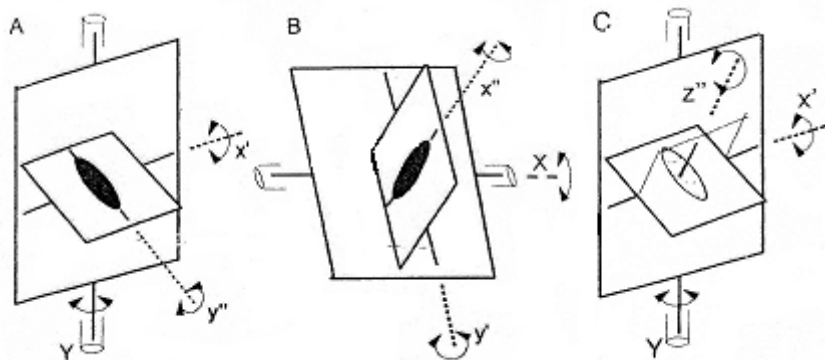
Specijalna definicija Eulerovih kutova, u kojem se rotacija događa u određenom slijedu (precesija - u sagitalnoj ravnini, nutacija - kretanja k ili od sagitalne ravnine, i rotacija ili okret - uzduž osi koja je fiksirana u tijelu), često se koristi u biomehanici. No ipak, moguće je promijeniti poredak Eulerovih kutova i definirati, na primjer, kao prvi kut rotacije tijela oko anteroposteriorne osi. Takvo određenje se može pokazati korisnim kod proučavanja gimnastičara kako vježba na konju s hvataljkama. U tom slučaju, nutacija i rotacija trebali bi imati drugačiju definiciju.

Sveukupno, postoji 12 nizova rotacija (Eulerova konvencija). No ipak, općeniti slijed je isti: prva rotacija je definirana u odnosu na os orijentiranu u globalnom sustavu, treća je definirana u odnosu na os učvršćenu na rotirajuće tijelo, i druga izvedena u odnosu na pokretnu os („ploveću os“). Druga i treća rotacija vrše se oko lokalnih osi, transformiranih prethodnom rotacijom. Te lokalne osi su označene s jednostrukom (') ili (") dvostrukom crticom prema broju rotacija koje prethode definiranju orijentacije. Na primjer, niz  $Xy'x''$  znači da je sekundarna rotacija izvedena oko lokalne osi  $y$ , koja je



rotirala prvo oko globalne osi  $X$ . Treća rotacija je oko lokalne osi  $x$ , koja je prethodno bila rotirala oko globalne osi  $X$ , a potom oko lokalne osi  $y$ .

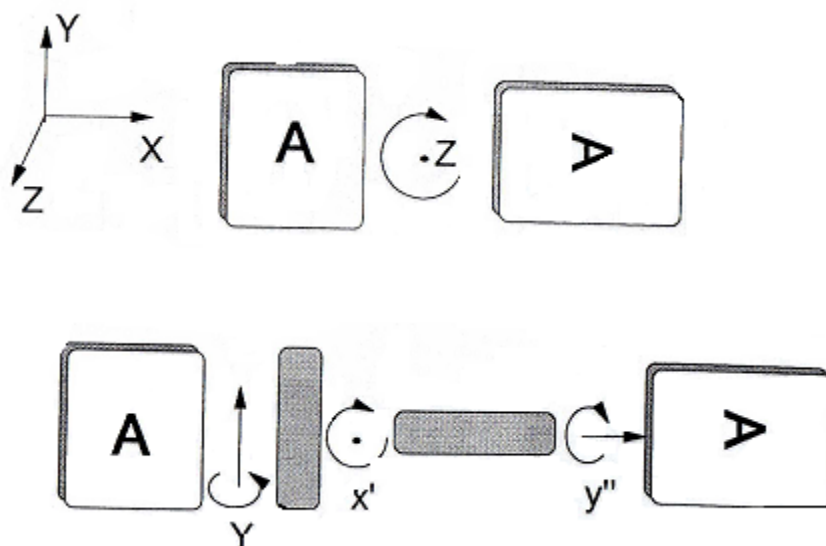
U literaturi se Eulerovi kutovi koriste da bi se opisalo šest nizova rotacije s identičnim konačnim koordinatama, a termin Kardanovi kutovi se koristi kad se želi opisati šest nizova rotacija s različitim konačnim osima. Eulerovi ili Kardanovi kutovi lagano mogu biti vizualizirani ako stavimo neko tijelo u kardanski sustav (slika 1.17). U početnoj poziciji Eulerovog zavješnja, sve tri osi rotacije su smještene u jednoj ravnini, na primjer, osi  $Yx'y''$  su u ravnini  $XY$ . Kardanovo zavješnje uključuje tri različite osi, na primjer,  $Y, x'$  i  $z''$ . Konvencionalno, Kardanovi kutovi se također odnose na troosni sustav ili giroskopski sustav. Eulerovi kutovi se odnose na dvoosni sustav.



Slika 1.17. Prikaz Eulerovih i Kardanovih kutova kao kutova kardanskog sustava. Slika A prikazuje Eulerov sustav s  $Yx'y''$  pravilom tj. vanjski prsten rotira oko vertikalne  $Y$  osi globalnog referentnog sustava, unutarnji prsten rotira oko lokalne osi  $y''$  učvršćene na prstenu, srednji prsten rotira oko  $x'$  osi koja nije učvršćena ni na lokalni ni na globalni sustav. Slika B prikazuje Eulerov sustav s pravilom  $Xy'x''$ , a slika C prikazuje kardanski sustav s pravilom  $Yx'z''$ .

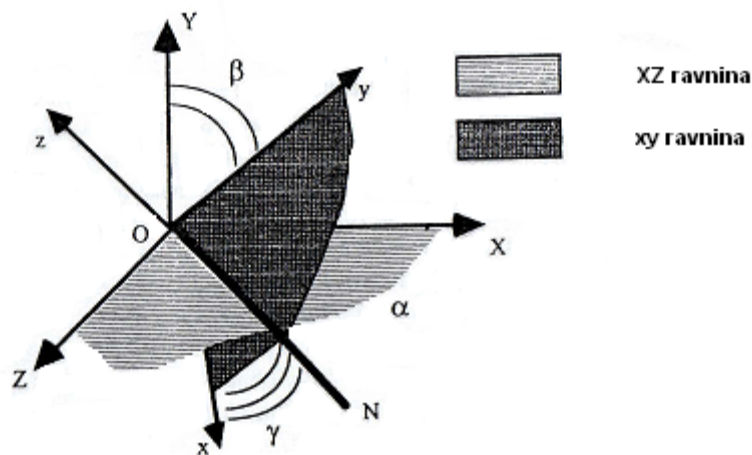
Kada je položaj tijela izmjeren prema Eulerovim ili Kardanovim pravilima, iznosi kutova su različiti. Slika 1.18 prikazuje da se ista orijentacija tijela može postići na različite načine. Na vrhu slike, objekt zaokreće oko osi  $Z$ , koja je okomita na ravninu u kojoj se nalazi slika. U donjem dijelu slike, objekt kreće iz iste pozicije, podvrgnut je trima rotacijama oko  $Y, x'$  i  $y''$  osi. U oba slučaja, konačna orijentacija je ista. Taj fenomen se

može vidjeti u gibanju ljudskog tijela. Na primjer, isti položaj ruke može se postići ili savijanjem (fleksijom) za  $180^\circ$ , ili abdukcijom za  $180^\circ$  i vanjskom rotacijom za  $180^\circ$ . Savijanje ruke (rotacija oko frontalne osi) dovodi ruku u istu poziciju kao i rotacija oko anteroposteriorne osi i nakon toga oko longitudinalne osi ruke. Stoga, ovisno o usvojenoj konvenciji (slijedu rotacija) isti položaj ruke može biti prikazan kao  $(\pi, 0, 0)$  ili kao  $(0, \pi, \pi)$ . Općenito, na vrijednosti izračunate za drugu i treću rotaciju imale su utjecaj prethodne rotacije. Na primjer, kada je orijentacija tijela opisana pomoću trijade  $Xy'x''$  i  $Xz'x''$ , vrijednosti rotacije oko osi  $x''$  su drugačije. Ipak, da bi definirali orijentaciju tijela, trebali bi poznavati sva tri Eulerova kuta.



Slika 1.18. Prikaz činjenice da se do iste orijentacije može doći na više načina

Položaj dvaju sustava može se definirati u odnosu na nodalnu ili čvornu os ( $N$ ), koja je presjek dviju ravnina, jedne iz globalnog sustava i jedne iz lokalnog sustava (slika 1.19). Ovaj pristup koristi se kod pravila rotacije zglobova, pri čemu se, jedna od osi rotacije, pomična os, podudara se s čvornom linijom.



Slika 1.19. Prikaz Eulerovih kutova

Definiranje relativnog kutnog položaja između dva tijela pomoću Eulerovih kutova ima nekoliko prednosti. Kutovi su jednostavni za razumjeti i mogu se direktno izmjeriti.

S Eulerovim kutovima, definiran je samo položaj. Stoga, Eulerovi kutovi ne tvore homogeni sustav, i translacija i rotacija moraju se razmatrati posebno. Ipak, Eulerovi kutovi se bez muke mogu izraziti kao elementi 3 x 3 rotacijske matrice,  $[R]=[R_1][R_2][R_3]$ , gdje su  $[R_1]$ ,  $[R_2]$  i  $[R_3]$  matrice rotacijskog slijeda, i tek tada je moguće napraviti proširenu transformacijsku  $[T]$  4 x 4 matricu. Za  $Zy'x''$  rotacijski slijed:

$$[R]=[R_z][R_y][R_x]=$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \cos \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta & \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma & \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma - \cos \alpha \cdot \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{bmatrix}$$

(1.29)

Elementi u kombiniranoj matrici (1.29) predstavljaju kosinuse smjerova između osi dvaju referentnih sustava. Oni su izraženi kao funkcije Eulerovih kutova. Ta operacija se naziva dekompozicija Eulerovih kutova. Kada je zadana matrica  $[R]$ , elementi matrice mogu biti interpretirani u obliku Eulerovih kutova, ako pretpostavimo određeni niz rotacija. Iz jednadžba (1.2) i (1.29), slijedi da za niz  $Zy'x''$  Eulerovih kutova možemo dobiti sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} A(Z) &= \tan^{-1} \frac{\cos_{21}}{\cos_{11}} \\ A(y') &= \tan^{-1} \frac{-\cos_{31}}{\sqrt{(\cos_{11})^2 + (\cos_{21})^2}} \\ A(x'') &= \tan^{-1} \frac{\cos_{32}}{\cos_{33}} \end{aligned} \quad (1.30)$$

gdje  $A(Z)$ ,  $A(y')$  i  $A(x'')$  su kutovi rotacije oko osi  $Z$ ,  $y'$  i  $x''$ .

Za određenu kutnu poziciju, kada je nutacijski kut jednak nuli, a prva i treća os su paralelne, Eulerovi kutovi ne mogu biti definirani. Takva kutna pozicija naziva se singularna. Ako je tijelo u singularnoj poziciji, prvi i treći kut se ne mogu izračunati. Moguće je jedino izmjeriti njihov zbroj ili razliku. Singularni položaji su drugačiji za svaki set Eulerovih kutova i mogu se izbjeći odgovarajućim odabirom referentnih sustava ili kutnih pravila. Ipak za neka gibanja niti jedna Eulerova konvencija nije odgovarajuća.

Nedostatak bilo kojeg Eulerovog pravila je zavisnost rezultata odabrane hijerarhije kardanskog sustava. Isti položaj tijela, kada se prikazuje u različitim Eulerovim koordinatnim sustavima, karakterizira različite vrijednosti kutnih koordinata. Promjena u slijedu rotacija općenito dovodi do promjene rezultata. U eksperimentalnim postavkama,

gdje ne postoji razlog da se osi tretiraju različito jedna od druge, odabir referentnog sustava ne ovisi toliko mnogo o odabiru istraživača.

#### *1.2.5.2.1 Izbjegavanje singularnih položaja pravilnim izborom referentnog sustava i pravilima o kutovima*

Postavljeni su sljedeći koordinatni sustavi (slika 1.20):

- Globalni sustav,  $O - XYZ$
- Pokretni sustavi na segmentima tijela; sustavi zadržavaju istu orijentaciju u prostoru s osima paralelnim osima u globalnom sustavu  $O_k - X_k Y_k Z_k$ , gdje  $k$  predstavlja broj zglobova, i
- Tjelesni sustavi pričvršćeni na zglobove tijela,  $o_k - x_k y_k z_k$ .

Napravljen je „žičani model“, a segmenti tijela prikazani su pomoću ravnih linija.

Da bi izbjegli singularitet kod proučavanja ljudskog hoda, koriste se sljedeći kutovi za definiranje orijentacije segmenta (liniji)  $k$ :

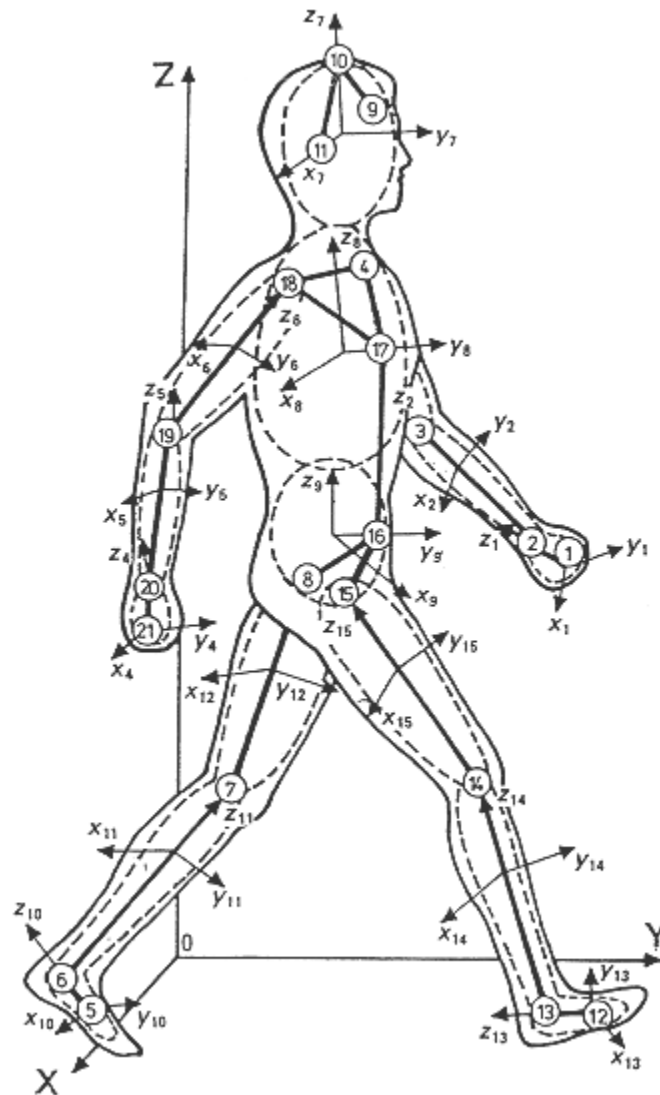
- $\theta_k$ , kut između pozitivnog smjera osi  $X_k$  i osi  $z_k$
- $\psi_k$ , kut koji tvore negativni smjer osi  $Z_k$  i projekcija osi  $z_k$  na  $Y_k O_k Z_k$  ravninu; i
- $\phi_k$ , kut koji tvore linija sjecišta ravnina  $X_k O_k Y_k$  i  $x_k o_k y_k$  (čvorna linija), i os  $x_k$ .

Orijentacijski kutovi su izračunati na sljedeći način:

$$\theta_k = \arccos(X_k, z_k)$$

$$\psi_k = \begin{cases} \pi, & \text{za } \cos(Y_k, z_k) = 0 \\ \pi - \arccos(\cos(Y_k, z_k) / \sin \theta_k), & \text{za } \cos(Y_k, z_k) < 0 \\ \pi + \arccos(\cos(Y_k, z_k) / \sin \theta_k), & \text{za } \cos(Y_k, z_k) > 0 \end{cases}$$

$$\phi_k = \begin{cases} \pi, & \text{za } \cos(X_k, y_k) = 0 \\ \pi - \arccos(\cos(X_k, y_k) / \sin \theta_k), & \text{za } \cos(X_k, y_k) < 0 \\ \pi + \arccos(\cos(X_k, y_k) / \sin \theta_k), & \text{za } \cos(X_k, y_k) > 0 \end{cases}$$



Slika 1.20. Referentni sustavi korišteni u proučavanju ljudskog hoda

### 1.2.6 Prednosti i nedostaci različitih kutnih pravila

Sve opisane kutne konvencije omogućuju definiranje kutne pozicije tijela u prostoru, ali svaka posjeduje određene značajke koje ju čine bolje upotrebljivom kod nekih specifičnih situacija. Slijede primarni zahtjevi za definiranje poze tijela s praktičkog stajališta:

- Direktna mjerljivost
- Trenutno fizikalno značenje. Koordinate tijela trebaju biti lagane za shvatiti od strane korisnika.
- Grafički prikaz. Promjene položaja trebaju biti jednostavne za grafičko prikazivanje. Ispunjenje zadnja dva zahtjeva je poprilično subjektivno.
- Singularitet, ili nedostatak singularnih položaja. U nekim konvencijama, vrijednost jedne ili više koordinata ne mogu biti definirane u određenim kutnim položajima.
- Periodičnost, ili problem nedostatka periodičnosti.
- Konvencija opisivanja slijeda rotacija

Različiti koordinatni sustavi uspoređeni su u tabeli 1.

**Tabela 1 – usporedba različitih kutnih koordinatnih sustava**

Metoda	Direktna mjerljivost	Trenutno fizikalno značenje	Grafovi	Singularitet	Periodičnost	Opisivanje slijeda rotacija
Matrična metoda	Ne	Da/Ne	Ne	Ne	Ne	Da
Eulerova metoda	Samo u nekim slu.	Da	Da	Da	Da	Ne

Vrlo važna značajka koordinatnog sustava je njegova mogućnost mjerenja pogrešaka.

### 1.2.7 Određivanje položaja tijela pomoću eksperimentalnih snimanja

U eksperimentalnim istraživanjima orijentacija i položaj tijela određuje se pomoću prostornih koordinata markera. Da bi se odredila orijentacija tijela, po segmentu ne smije biti fiksirano manje od tri markera,  $n \geq 3$ , i markeri ne smiju ležati na pravcu. Koordinate markera se mjere s neizbježnim pogreškama, koje se nazivaju *šum*. Šum može biti uzrokovan pomakom markera na koži u odnosu na koštani skelet, nepreciznim optičkim mjerenjima, ili nekim drugim faktorima. Kada se položaj tijela izračuna pomoću koordinata koje su bile pod utjecajem šuma, pogreška se naravno povećava. U eksperimentalnom istraživanju, prakticiraju se dva glavna pristupa:

1. Zanemaruje se šum; koriste se samo tri markera po segmentu.
2. Pogreška zbog šuma se minimizira; koristi se više od tri markera.

U prvom slučaju, istraživač pretpostavlja da markeri ne mijenjaju svoj položaj u odnosu na segment tijela na koji su pričvršćeni. Ipak, njihove lokalne koordinate su konstantne i mogu se zapisati kao  $3 \times 3$  matrica;  $[P_L]$ . Translacija je određena vektorom  $L_G$ . Da bi se odredila matrica rotacije, snimaju se globalne koordinate sva tri markera. Tada, za svaki marker  $P^{(i)}$  ( $i=1,2,3$ ) računa se razlika  $P_M^{(i)} = P_G^{(i)} - L_G$ , gdje je  $P_G^{(i)}$  vektor položaja točke  $P^{(i)}$  u globalno referentnom sustavu G. Elementi vektora  $P_M^{(i)}$  su koordinate zadanog markera u pokretnom referentnom sustavu, na primjer, u lokalnom koordinatnom sustavu koji se giba translataro zajedno sa segmentom tijela, ali održava konstantnu orijentaciju u prostoru, referentne osi su paralelne s osima globalnog sustava.

Koordinate svih markera u pokretnom sustavu prikazane su u  $3 \times 3$  matrici,  $[P_M]$ .

Pokretni sustav i tjelesni sustav razlikuju se samo u položaju, stoga se može primijeniti jednadžba (1.10). Zbog toga što jednadžba vrijedi za bilo koju točku na tijelu, vrijede i za markere i može se zapisati kao:

$$[P_M] = [R][P_L] \quad (1.31)$$



U drugom slučaju, točnost se poboljšava pomoću povećanja broja markera koji su pričvršćeni na pojedini segment i procjenom parametara položaja tijela pomoću optimizacijskih tehnika. Kada se koristi više od tri markera, matrica  $[P_L]$  nije kvadratna matrica i jednačba (1.31) se ne može direktno upotrijebiti. Optimalno rješenje za rotacijsku matricu  $[R]$  može se dobiti ili pomoću metode najmanjih kvadrata ili pomoću takozvane Moore-Penrose pseudoinverzne matrice. Određivanje matrice rotacije  $[R]$  i translacijskog vektora  $L_G$  može se postići minimizacijom

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ([R]P_L^{(i)} + L_G - P_G^{(i)})^T ([R]P_L^{(i)} + L_G - P_G^{(i)})^T \rightarrow \min \quad (1.32)$$

gdje su  $P_L^{(i)}$  i  $P_G^{(i)}$  koordinate točke  $P^{(i)}$  u lokalnom i globalnom sustavu, a  $n$  je broj nelineranih točaka izmjerenih u oba referentna sustava ( $n > 3$ ).

Kada se koristi Moore-Penrose matrica za pronalaženje optimalnog rješenja, rotacijska matrica  $[R]$  određuje se iz sljedećeg izraza:

$$[R] = [P_G][P_L]^+ = [P_G][P_L]^T([P_L][P_L]^T)^{-1} \quad (1.33)$$

gdje su  $[P_G]$  i  $[P_L]$   $3 \times n$  matrice koordinata markera u globalnom i lokalnom sustavu, a  $[P_L]^+ = [P_L]^T([P_L][P_L]^T)^{-1}$  je pseudoinverzija od  $[P_L]$ . Jednačba (1.33) se koristi umjesto jednačbe (1.31) kada je broj markera veći od 3.

## 2. Kinematički lanci

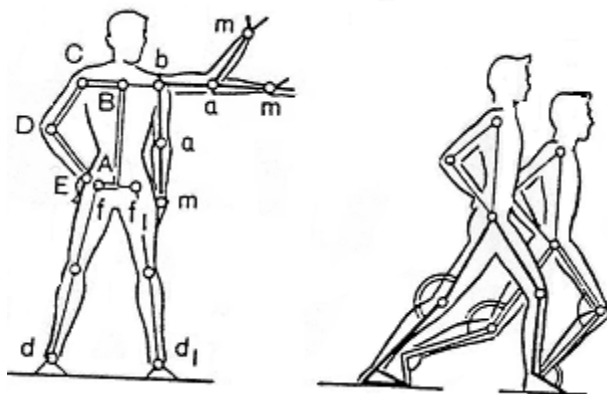
Ljudsko tijelo može biti modelirano kao sustav štapova, koji predstavljaju segmente tijela spojene zglobovima. Povezana kruta tijela ponašaju se kao *kinematički lanac*.

Najjednostavniji kinematički lanac sastoji se od dva člana spojenih jednim zglobovom.

Sklop dva susjedna člana spojenih jednim zglobovom, naziva se *kinematički par*.

Vezivanje kostiju u kinematičkom paru očuvano je ili pomoću njihovog oblika ( oblikom zatvoreni par) ili pomoću vanjske sile ( silom zatvoreni par). Zglob kuka je najbliži oblikom zatvorenom tipu, dok se rameni zglob smatra silom zatvoreni tip zbog toga što je očuvan pomoću okolnih mišića i ligamenata.

Kinematički lanci su ili serijski (jednostavni) ili granati (složeni). U serijskim lancima, svaki od članova je dio od maksimalno dva kinematička para. Granati lanac sadrži barem jedan član koji je dio više od dva kinematička para. Ljudska ruka ili noga može se smatrati kao serijski kinematički lanac. Kada se uzme u obzir trup tijela i zanemare zglobovi unutar trupa, radi se o granatom lancu. U trup ulazi pet kinematičkih lanca: dva zgloba kuka, dva ramena zgloba i zglob trup-vrat. Kinematički lanci se dalje dijele na otvorene i zatvorene. Kinematički lanac se smatra otvorenim ako se jedan kraj lanca može slobodno gibati. U zatvorenim lancima, oba kraja su fiksirana tj. pod djelovanjem ograničenja. Primjeri za otvoreni i zatvoreni kinematički lanac u gibanju ljudskog tijela dani su na slici 2.1.



Slika 2.1. Kinematički lanci u ljudskim pokretima  
bam – otvoreni lanac  
ABCDEA, dff<sub>1</sub>d<sub>1</sub> – zatvoreni lanci

## 2.1 Stupnjevi slobode i pokretljivost kinematičkog lanca

Pojam „stupnjevi slobode“ (SS) odnosi se na nezavisne koordinate potrebne da bi se u potpunosti okarakteriziralo tijelo, sustav, ili položaj. Jedan SS se može definirati kao neovisan način na koji se tijelo može gibati. Kruto tijelo koje se slobodno giba ima 6 stupnjeva slobode. Tijelo može translahirati uzduž ili rotirati oko tri nezavisne osi (longitudinalna, vertikalna, frontalna). Kada se razmatra planarno gibanje, tijelo ima tri stupnja slobode: može translahirati u dva smjera, i može rotirati.

Nezavisne koordinate su bilo koji skup veličina koje potpuno određuju stanje sustava. Te koordinate se nazivaju *poopćene koordinate*. Poopćene koordinate se općenito zapisuju kao  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , ili jednostavnije kao  $q_i$ . Odabir skupa poopćenih koordinata da bi opisali sustav, nije jedinstven; postoji mnogo skupova veličina koji potpuno opisuju specifično stanje zadanog sustava.

Jedna točka u prostoru ima tri stupnja slobode. Sustav od  $n$  točaka ima  $3n$  stupnjeva slobode. Međutim, ako sve  $n$  točke pripadaju jednom krutom tijelu, one će ostati na konstantnoj udaljenosti jedna od druge i kruto tijelo će u prostoru imati 6 stupnjeva slobode. Sustav od  $N$  krutih tijela, ako nije ograničen, ima  $6N$  stupnjeva slobode. Ako neke od  $6N$  koordinata nisu nezavisne (što bi bio slučaj da su tijela povezana zglobovima), broj stupnjeva slobode se smanjuje. Ako je  $m$  jednadžba ograničenja tada je  $(6N-m)$  nezavisnih koordinata, i sustav ima  $(6N-m)$  stupnjeva slobode. Ograničenja mogu biti kompletna ili samo jednostrana. Na primjer, tijekom stajanja, stopalo se može gibati gore, ali se zato ne može gibati dolje. Kada jednadžbe ograničenja povezuju samo koordinate, ograničenja se nazivaju holonomna. Ograničenja koja se odnose na brzinu, akceleraciju itd., nazivaju se neholonomna. Ako jednadžba ne sadrži vrijeme, ograničenja su skleronomna, a ako ograničenja ovise o vremenu onda su reonomna.

Maksimalan broj stupnjeva slobode za svaki zglob je 6. Ako se zanemari translataro gibanje u zglobu, maksimalan broj stupnjeva slobode je tri. Geometrija ljudskog zgloba je vrlo složena. Površina ljudskog zgloba je prirodno nepravilno oblika, stoga se

geometrija površine zgloba ne može jednostavno opisati. Stoga, radi se kompromis između točnosti i jednostavnosti.

Da bi se pojednostavilo proučavanje gibanje ljudskog tijela, zglobovi su klasificirani tako da imaju jedan, dva ili tri rotacijska stupnja slobode. Zglob s jednim stupnjem slobode se naziva „zglob“ ili „zglob koji se savija prema unutra“. Zglobovi s tri stupnja slobode se nazivaju sferični zglobovi. Zglobovi prsta su primjer prvoga, kuk i rame primjer drugoga oblika. Neki zglobovi koji se koriste za slijeganje ( recimo slijeganje ramena) imaju dva stupnja slobode.

U mehaničkim modelima, kada se razmatra uvijanje, uvijanju se obično pridodaju jedan ili dva zgloba, proksimalni ili distalni.

Konačan broj stupnjeva slobode u kinematičkom lancu, naziva se pokretljivost kinematičkog lanca. Da bi se izračunala pokretljivost kinematičkog lanca, usvojene su sljedeće konvencije: vanjski referentni sustav, koji je fiksiran za nepomičnu točku, broji se kao dodatni član kinematičkog lanca. S ovom konvencijom, broj krutih tijela u lancu raste za N+1. Kada se koristi ta konvencija, pokretljivost kinematičkog lanca u prostoru može se opisati sljedećom jednačinom:

$$F = 6(N - k) + \sum_{i=1}^k f_i \quad (2.1)$$

gdje je N broj članova, k je broj zglobova, a  $f_i$  je broj stupnjeva slobode u i-tom zglobu. Jednačina je poznata kao Grueblerova formula. Za otvoreni lanac, broj zglobova jednak je broju članova. Jednačina (2.1) se može pojednostavniti i zapisati kao

$$F(\text{za otvoreni lanac}) = \sum_{i=1}^k f_i \quad (2.2)$$

Ako je lanac zatvoren, ima jedan zglob više od broja članova,  $k = N + 1$ . Pokretljivost lanca je

$$F(\text{za zatvoreni lanac}) = \sum_{i=1}^k f_i - 6$$

(2.3)

Kada se kinematički lanac opisuje pomoću planarnog sustava, Grueblerova formula se modificira kao

$$F = 3(N - k) + \sum_{i=1}^k f_i$$

(2.4)

Za zatvoreni lanac u planarnom sustavu, pokretljivost se računa kao

$$F(\text{za zatvoreni planarni lanac}) = \sum_{i=1}^k f_i - 3$$

(2.5)

Kinematički lanci koji imaju samo jedan stupanj slobode nazivaju se *mehanizmi*. U mehanizmima, barem jedan član je pričvršćen za nepomičnu podlogu, koja se smatra integralnim djelom mehanizma. Položaj ili gibanje bilo kojeg člana opisuje položaj ili gibanje svih ostalih članova. Kada se takva situacija može opisati u kretanju čovjeka ili životinje, nazivamo je *biomehanizam*.

## 2.2 Otvoreni kinematički lanci: pokretljivost zadnjeg člana

U mnogim ljudskim kretnjama, posljednji član otvorenog kinetičkog lanca, recimo šaku ili stopalo, potrebno je pozicionirati na specifično mjesto sa specifičnom orijentacijom. Taj član je nazvan *krajnji vršitelj radnje (zadnji efektor)*. Krajnji efektor može imati vlastitu pokretljivost, na primjer ljudska šaka. Sposobnost ljudske ruke da nešto prihvati i sposobnost pozicioniranja ruke mogu se promatrati kao odvojene funkcije. Da bi bio proizvoljno pozicioniran u nekoj točki u prostoru, krajnji efektor mora imati najmanje 6 stupnjeva slobode gibanja. Broj stupnjeva slobode efektora odgovara pokretljivosti kinematičkog lanca. Ako lanac ima manje od 6 stupnjeva slobode, krajnji efektor ne može biti proizvoljno pozicioniran u prostoru dosega. Kada lanac ima točno 6 stupnjeva slobode gibanja, postoji točno jedna zglobna konfiguracija koja će dovesti krajnjeg efektoru u zahtijevanu poziciju, na primjer, na zadano mjesto sa zadanom orijentacijom. Kada lanac ima više od 6 stupnjeva slobode gibanja, krajnji efektor može biti pozicioniran u određenu točku sa određenom orijentacijom na beskonačno mnogo načina. Otvoreni kinematički lanac s više od 6 stupnjeva slobode naziva se *redudantni lanac*. Za opširne lance, beskonačan skup zglobova dovodi krajnjeg vršitelja do iste lokacije.

Sposobnost manevra lanca opisana je kao  $M=F-6$ , gdje je  $F$  broj stupnjeva slobode gibanja lanca. Sposobnost manevriranja,  $M$ , jednak je broju dodatnih parametara koji se mogu iskoristiti da vode krajnjeg efektoru u željenom pravcu; na primjer, zaobilazanje prepreke ili minimiziranje energetske potrošnje.

Kod proučavanja kinematičkih lanaca, javljaju se dva problema:

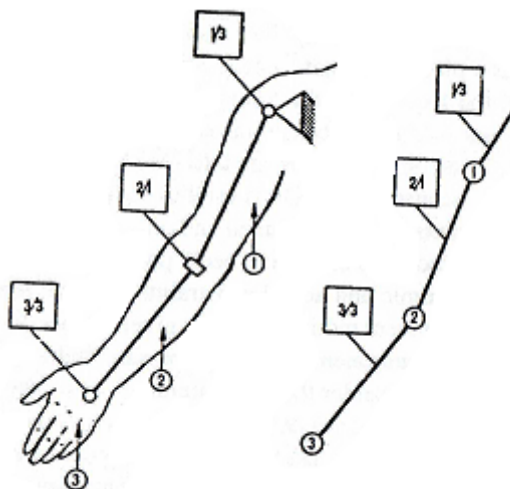
1. Poznate su koordinate zglobova, a traži se položaj krajnjeg efektoru. Takva vrsta problem se naziva *direktni kinematički problem*.
2. Poznata je pozicija krajnjeg efektoru, a traže se koordinate zglobova. Takva vrsta problema se naziva *inverzni kinematički problem*.

Treba još primijetiti da je pozicija krajnjeg efektoru, koja se traži ili je zadana, dana u apsolutnim koordinatama. Koordinate zglobova su kutovi između dva susjedna člana.

### 2.3 Kinematički modeli i pokretljivost ljudskog tijela

Kinematički modeli ljudskog tijela opisuju pokretljivost istog dok se ostali aspekti zanemaruju. Modeli se dijele na *antropomorfne*, također se još i zovu *skeletni*, ili *funkcionalne*.

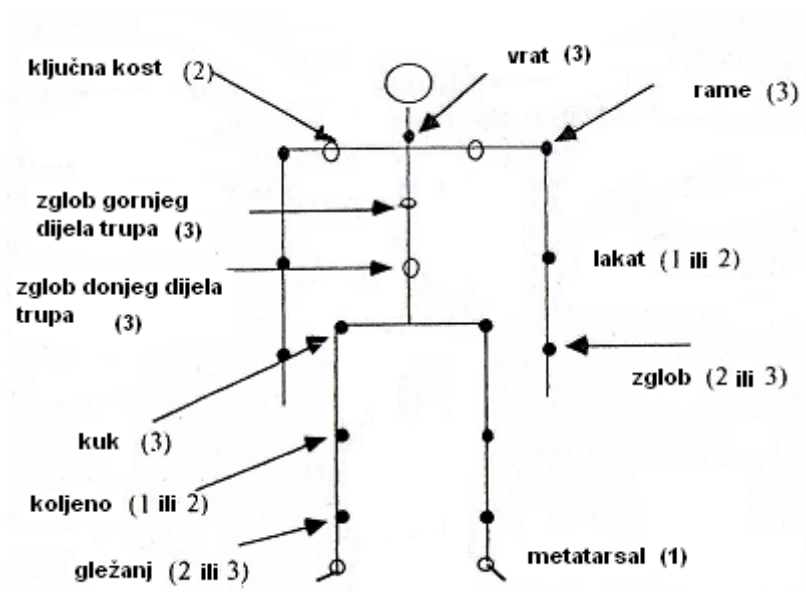
Skeletni model vizualno prikazuje konstrukciju ljudskog tijela; segmenti tijela su modelirani kao kruti članovi, a ljudski zglobovi kao zglobovi modela. U funkcionalnom modelu segmenti tijela su prikazani kao štapovi spojeni u čvorove (slika 2.2). Takav način prikaza ima određene prednosti za kompjutorsko modeliranje i strukturu podataka: zglobovi spajaju točno dva segmenta. Segmenti mogu imati nekoliko zglobova. Na primjer, trup, ako se promatra u cijelosti, osigurava vezu između dva zgloba kuka, dva ramena, i veza vrat-trup.



Slika 2.2. Dva modela ruke; antropološki i funkcionalni

Model prikazan na slici 2.3 sastoji se od maksimalno 18 krutih segmenata, 17 zglobova i ima 41 stupanj slobode. Ako se zanemari sternoklavikularni zglob i kralježnica se promatra kao čvrsti segment, broj stupnjeva slobode se smanjuje na 31. Takav model se naziva *reducirani model tijela*, u kojem je mnogo manjih zglobova jednostavno isključeno. U reduciranom modelu ruka ima 7 stupnjeva slobode. Stoga, je njegov

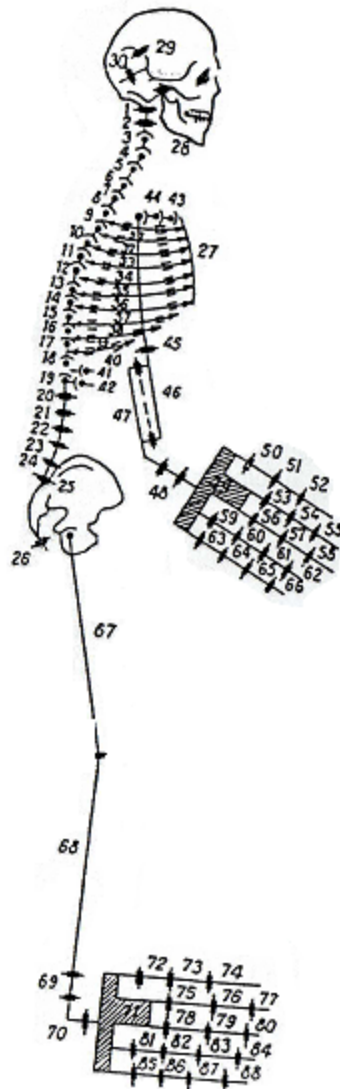
kinematički lanac redundantni. To je vrlo jednostavno za prikazati. Kada je šaka fiksirana na stolu, i također je fiksirano rame, može se micati lakat bez da pomičemo lakat ili šaku. Ozbiljan problem se javlja kada želimo modelirati trup pomoću reduciranog modela. Previše je nerealistično ako trup gledamo kao kruto tijelo. Inkorporacija izmišljenih trupnih zglobova poboljšava kvalitetu modeliranja, ali ne rješava problem kompletno. Na primjer, kada se model prikaže na ekranu, segmenti trupa su međusobno odvojeni nekim kutom. Iako je više realistično da se torzo prikaže kao segment koji nije kruti, matematičke poteškoće koje se vežu uz to su velike i danas još uvijek nerješive.



Slika 2.3. Kinematički model ljudskog tijela

Da bi procijenili potpunu pokretljivost tijela, u obzir moramo uzeti sve zglobove i segmente. Prema pretpostavkama u ljudskom tijelu postoji 148 pokretnih kostiju i 147 zglobova. Takav model je prikazan na slici 2.4. S takvim pristupom, ruka više nema samo 7 već 30 stupnjeva slobode.





Slika 2.4. Pokretljivost ljudskog tijela. Brojevi se odnose na zglobove

Potpuna pokretljivost može se procijeniti korištenjem modificirane Grueblerove formule

$$F = 6N - \sum_{i=3}^E i \cdot j_i \quad (2.6)$$

gdje je  $F$  pokretljivost tijela (ukupan broj SS),  $N$  je broj pokretljivih kostiju,  $i$  je klasa zgloba ( $i = 6 - f$ , gdje je  $f$  broj SS)  $j_i$  je broj zglobova klase  $i$ . Ustanovljeno je da ljudsko tijelo ima 148 pokretnih kostiju spojenih zglobovima, 29 zgloba su treće klase (tri SS), 33 zgloba je četvrte klase (sva SS), i 85 zglobova pete klase (jedan SS). Konačna pokretljivost ljudskog tijela je

$$F = (6 \cdot 148) - (3 \cdot 29) - (4 \cdot 33) - (5 \cdot 85) = 244$$

(2.7)

Stoga, ljudski skelet je vrlo složen. Ima 244 stupnja slobode gibanja, te treba upravljati s 238. Da bi se pozicionirao krajnji efektor u prostoru, mozak mora odrediti ne 6, već 244 varijabli, od kojih je 238 redundantnih. Samo za usporedbu, robotska ruka uobičajeno nema više od pet ili šest stupnjeva slobode gibanja.

## 2.4 Ograničenja ljudskog gibanja

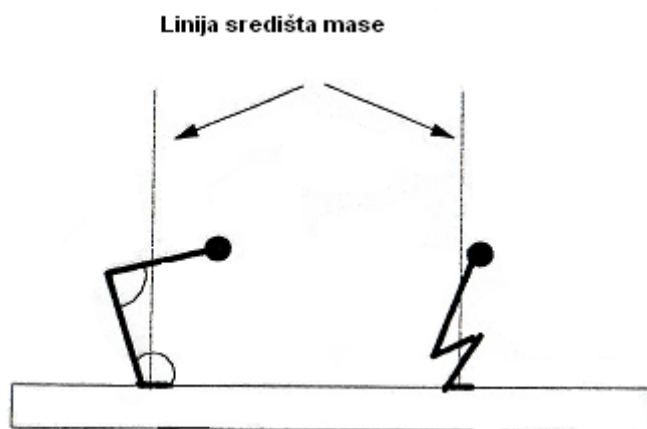
Geometrijska (holonomna) ograničenja u ljudskom gibanju mogu se podijeliti u nekoliko grupa: anatomska, realna, mehanička, motorička ograničenja.

*Anatomska ograničenja* su nametnuta strukturom lokomotornog sustava. Svi zglobovi su ograničeni na barem dva načina: prvo, segmenti tijela tvore zglobnu vezu između sebe, i drugo, opseg gibanja zgloba je ograničen. Ograničenja se mogu postaviti na gibanja oko različitih osi.

*Realna ograničenja* su određena fizičkim preprekama gibanja, kao što su recimo površina ili elementi okružujućeg okoliša. Ta ograničenja smanjuju ljudsku pokretljivost. Na primjer, tijekom pedaliranja noga se može modelirati kao planarni kinematički lanac s tri zgloba ( kuk, koljeno i gležanj; pretpostavlja se da je položaj kuka stacionaran). Bilo kako bilo, tijekom bicikliranja, nametnuto je jedno dodatno ograničenje koje se odnosi na konstantan kontakt stopala i pedale. Stoga, imamo samo dva stupnja slobode gibanja. Jedan stupanj slobode se koristi za rotaciju pedale; stoga, zadnji stupanj slobode koji nije ograničen koristimo za tehniku pedaliranja. Tehnike su: fiksni nožni zglob (pedaliranje prstima) i pokretni nožni zglob (pedaliranje petom).

Anatomska i realna ograničenja su stvarna, prava: uzrokovana su materijalnim tijelima koji sprečavaju gibanje iznad zadane granice. U ljudskim kretnjama, ipak, da bi se izvela neka motorička radnja, treba zadovoljiti različite zahtjeve. Normalno je te zahtjeve smatrati ograničenjima.

*Mehanička ograničenja* su ta koja definiraju geometriju gibanja na indirektni način; čovjek se mora osloniti na njih da spriječi nezgodu, kao što je pad. Dva mehanička ograničenja se pojavljuju više od drugih i zbog toga su tipična za ovu vrstu ograničenja. A to su: zahtijevana ograničenja zbog ograničenja trenja i zahtijevana ograničenja zbog ravnoteže. Primjer prvog ograničenja je prevencija nesreća zbog klizanja, ljudi bi se trebali odgurivati (kod hoda i trčanja) pri kutu koji je veći od kuta trenja, zbog toga što mali kutovi dovode do proklizavanja i padova. Primjer drugog ograničenja se može vidjeti ako promatramo nogu kao lanac s tri rotacijska stupnja slobode. U stajaćoj pozi, nametnuto je ograničenje zbog vertikalne projekcije težišta tijela koja mora biti u vrlo uskom području. Stoga, ostaje nam samo dva stupnja slobode. Kao rezultat, kod doskoka moguće su dvije strategije: „savijanje trupa“ ili „savijanje koljena“ (slika 2.5). Kada nije dozvoljeno savijanje koljena, kao što je u čistoj strategiji savijanja trupa, sustav ima samo jedan stupanj slobode; gibanja u zglobovima kuka i gležnja su spregnuta.



Slika 2.5. Ravninski kinematički lanci s jednim stupnjem slobode gibanja (lijevo, strategija „savijanja trupa“) i s 2 stupnja slobode gibanja( desno, strategija „savijanja koljena“)

*Motorička ograničenja* su nametnuta svjesno ili nesvjesno od strane izvođača koji izvršava zadanu kretnju ili pokušava izvesti planiranu motoričku radnju. Ta ograničenja se klasificiraju kao *instrukcijska* (definirane su instrukcijom od strane izvođača eksperimenta, pravilom nadmetanja, ili sličnim pravilima) i *hotimična* (nametnuta od strane izvođača). Zbog razloga što je ljudski motorički sustav vrlo redundantan, broj ograničenja je vrlo visok. Kontrolom ljudskih ili životinjskih kretnji mogu se eliminirati redundantni stupnjevi slobode gibanja. Da bi se izvršio neki motorički pokret, moramo smanjiti ili ograničiti tako opsežan broj stupnjeva slobode. Taj problem se naziva *Bernsteinov problem*. Ime je dobio po ruskom biomehaničaru i fiziologu Nicholai A. Bernsteinu, a svodi se na eliminaciju redundantnih stupnjeva slobode.

Centralni živčani sustav reducira stupnjeve slobode na nekoliko načina. Na primjer, neki zglobovi su „zamrznuti“ tijekom izvedbe motoričkih kretnji, stoga, njihova se kutna vrijednost ne mijenja. Također, gibanja nekih zglobova su spregnuta tijekom trajanja nekih radnji. Takva spregnutost se naziva *funkcionalna sinergija*. Koncept zglobne sinergije nam govori o tome da je nekoliko zglobova kontrolirano kao cjelina. Funkcionalna sinergija i zamrznuti zglobovi smanjuju broj stupnjeva slobode kontroliranih od strane živčanog sustava. Također, samo neki stupnjevi slobode, koji se nazivaju *esencijalni*, kontrolirani su bezuvjetno kroz cijelu izvedbu. Drugi, koji se nazivaju *neesencijalnim*, su dosta pod slobodnom kontrolom. Ako se pokret ponovi nekoliko puta, esencijalne varijable pokazuju malu varijabilnost. Varijabilnost neesencijalnih varijabli je mnogo veća. Na primjer, kada zakucavamo čavao čekićem, varijabilnost pozicije čekića je mnogo manja kada čekić dotakne čavao, nego kada je u fazi podizanja. Ovo promatranje, izvedeno od Bernsteina 1920 godine, je polazna točka u proučavanju biomehanike i motorne kontrole.

## 2.5 Analiza položaja kinematičkih lanaca

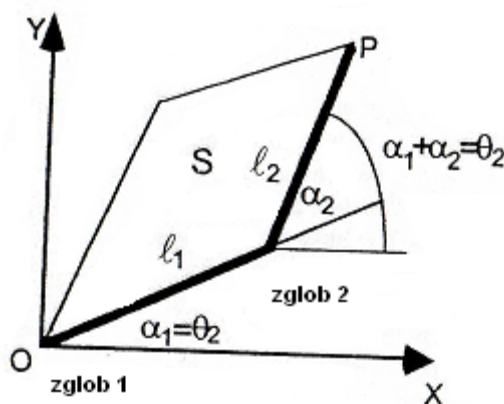
U ovom dijelu, razmatrat će se otvoreni lanci.

### 2.5.1 Dva jednostavna lanca

Razmotrimo dva jednostavna lance, s dva člana i s tri člana. Problemi na koji bi trebalo uputiti su direktna kinematika, indirektna kinematika, i način prikazivanja lanaca.

#### 2.5.1.1 Dvočlani planarni lanac

Dužine članova su  $l_1$  i  $l_2$  (slika 2.6). Os  $X$  se računa kao dodatni član lanca,  $l_0$ . Kraj člana  $l_1$  je ograničen za ishodište, i stoga su dozvoljene samo rotacije u zglobovima. Eksterni ili anatomske kutovi u zglobovima 1 i 2 su  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Kranja točka lanca označena je s  $P$ . Dvočlani planarni lanac je najjednostavniji mogući model ljudskog ekstremiteta. Često, prema bližem članu lanca se odnosimo kao „nadlaktica“ ili „bedro“, a prema distalnom, „podlaktica“ ili „potkoljenica“. Zglob 2 u tom je slučaju „lakat“ ili „koljeno“ a zglob 1, u ishodištu  $O$ , je „rame“ ili „kuk“. Takav lanac predstavlja ljudsku ruku ili nogu bez gibanja u zglobovima šake ili gležnja.



Slika 2.6. Model dvočlanog planarnog lanca

**Direktna kinematika.** Kada su poznati kutovi  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , položaj točke P i oblik lanca lagano se mogu pronaći. Projekcije zgloba 2 i točke P na osi X i Y su:

$$X_2 = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_2 = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (2.8)$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

Stoga, direktni problem ima jedinstveno rješenje. Rješenje se može također zapisati i u matričnoj formi:

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin \alpha_1 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

**Inverzna kinematika.** Ako je položaj točke P zadan u području dosega, mogu se koristiti dvije konfiguracije lanca da bi se lociralo P u poziciji  $X_P$  i  $Y_P$ . Druga konfiguracija kod koje je lakat u uzdignutom položaju, je prikaz prve kroz liniju O,P. Tako da, i u najjednostavnijem slučaju, inverzno rješenje ne može biti jedinstveno.

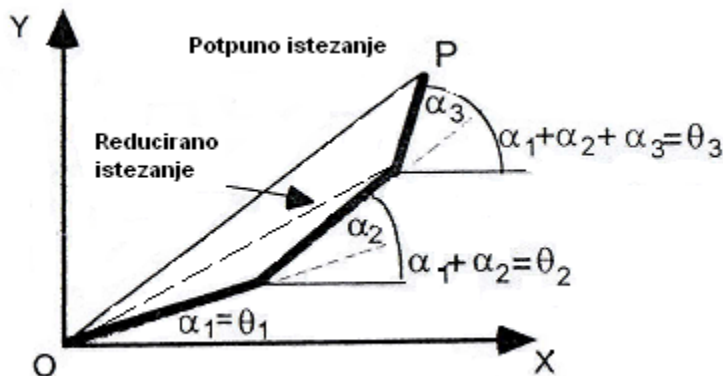
Dvočlani lanac se konvencionalno može prikazati položajem i radijus vektorom koji se proteže od ishodišta O do krajnje točke distalnog segmenta P. Ta udaljenost se može dobiti korištenjem kosinusovog poučka. Kut u laktu ili koljenu je  $(\pi - \alpha_2)$ , iz toga dobivamo stranicu trokuta OP:

$$OP = \left[ l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(\pi - \alpha_2) \right]^{0.5} \quad (2.10)$$

Ovu udaljenost ćemo nazvati *ekstremno istezanje*. Koristi ćemo oznaku  $S$  da bi označili istezanje. Pokret koji smanjuje ili povećava istezanje naziva se fleksija ili ekstenzija ekstremiteta. Promjena u orijentaciji radijus vektora se naziva rotacija ekstremiteta. Planarno gibanje ekstremiteta je kombinacija fleksije ili ekstenzije i rotacije. Opisani prikaz dvočlanog lanca je jednak prikazu zglobnih kutova. U oba slučaja sustav s dva stupnja slobode gibanja je eksplicitno definiran s dva neovisna parametra. Treba primijetiti da fleksija/ekstenzija ruke ili noge ovisi o promjenama samo u drugom zglobu; rotacija ekstremiteta funkcija je dva zglobna kuta. Kada se dogodi čista fleksija/ekstenzija, krajnja točka se miče po radijusu, i zadržava istu rotaciju u prostoru. Tijekom radnje guranja ili povlačenja, članovi 1 i 2 nadlaktica i podlaktica tj. natkoljenica i potkoljenica) istovremeno rotiraju u suprotnom smjeru na spregnuti način. Radnja dosega uključuje fleksiju/ekstenziju zgloba lakta i ramena u suprotnim smjerovima.

#### 2.5.1.2 Tročlani planarni lanac

Dužina članova je  $l_1, l_2$  i  $l_3$  (slika 2.7). Kutovi u zglobovima 1, 2 i 3 su  $\alpha_1, \alpha_2$  i  $\alpha_3$ . Distalni segment,  $l_3$ , je krajnji vršitelj radnje i trebao bi biti smješten u ravnini na takav način da se kraj distalnog segmenta podudara s koordinatama  $X_P, Y_P$ .



Slika 2.7. Model tročlanog planarnog lanca

**Direktna kinematika.** Zadane su koordinate  $\alpha_1, \alpha_2$  i  $\alpha_3$ ; potrebno je pronaći položaj krajnjeg vršitelja ili njegove krajnje točke. Lako je vidljivo iz slike da je orijentacija člana  $l_i$  u apsolutnom referentnom sustavu,  $\Theta_i$ , jednaka zbroju kutova zglobova:  $\Theta_1 = \alpha_1$ ,  $\Theta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $\Theta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Projekcije zglobova 2 i 3 i krajnje točke P na X i Y osi su:

$$X_2 = l_1 \cos \Theta_1 = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_2 = l_1 \sin \Theta_1 = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_3 = l_1 \cos \Theta_1 + l_2 \cos \Theta_2 = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_3 = l_1 \sin \Theta_1 + l_2 \sin \Theta_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$X_P = l_1 \cos \Theta_1 + l_2 \cos \Theta_2 + l_3 \cos \Theta_3 = \quad (2.11)$$

$$= l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) + l_3 \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$Y_P = l_1 \sin \Theta_1 + l_2 \sin \Theta_2 + l_3 \sin \Theta_3 =$$

$$= l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) + l_3 \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

Direktni problem je vrlo jednostavno za riješiti. U matričnom obliku jednadžba za točku P glasi:

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta_1 & \cos \Theta_2 & \cos \Theta_3 \\ \sin \Theta_1 & \sin \Theta_2 & \sin \Theta_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

(2.12)



**Inverzna kinematika.** Zadane su koordinate krajnjeg vršitelja radnje  $X_P$  i  $Y_P$ . Postoji beskonačan broj rješenja: dvije jednačbe i tri nepoznanice ne mogu biti riješene na jedinstven način. Isti položaj točke može se izvesti na mnogo različitih načina.

Kada radijus vektor polazi iz ishodišta O do točke P ili do zgloba 3, odgovarajuća udaljenost se naziva „*potpuno istežanje*“ i „*reducirano istežanje*“ (slika 2.7). Rotacija, fleksija/ekstenzija ruke ili noge je ista kao što je prije opisano. Tročlani ekstremitet definiran radijus vektorom ima jedan redundantni stupanj slobode.

Ako je zadnji član nepomičan kinematički lanac još uvijek može mijenjati svoju konfiguraciju, ali kutovi u zglobovima su spregnuti.

## **Literatura**

- [1] Engin, A.E.: On the biomechanics of the shoulder complex, Journal of Biomechanics, 13, 575- 590, 1980.
- [2] Husnjak, M., Teorija mehanizama. 2003.
- [3] Jecić, S., Mehanika II, Kinematika i dinamika, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.
- [4] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata. Golden marketing, Zagreb,2007.
- [5] Vaughan, C.L., J.G. i Andrews, J.G.: Closed loop problems in biomechanics. Journal of Biomechanics, 15, 197-200, 1982.
- [6] Yeadon, M.R.: The simulation of aerial movement. 3. The determination of the angular momentum of the human body. Journal of Biomechanics, 23, 75-83, 1990.
- [7] Zatsiorsky Vladimir M.: Kinematics of human motion, Human Kinetics, 1998.
- [8] Zatsiorsky Vladimir M. i S.Y. Aleshinsky: Simulation of human locomotion in space, Baltimore: University Park Press, 1975.
- [9] <http://www.kkforma.net/portal/modules.php?name=News&file=print&sid=13>,  
rujan,2004.